

1- استنتج من الأسئلة السابقة أن المعادلة (D) لا تقبل حلا في \mathbb{C} ' \mathbb{C}

التمرين 2: (3.5 نقطة/اختياري) (إذا اخترت إنجاز التمرين 2 فلا تنجز التمرين 1)

نرمز بالرمز $(M_2(i))$ لمجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

نذكر أن $(M_2(R), +, \cdot)$ حلقة غير تبادلية وواحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(i^*, ')$ زمرة تبادلية.

نعتبر المجموعة الجزئية E من $(M_2(i))$ المعرفة بما يلي:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x \in i^* ; y \in i^* \right\}$$

0.5 1- أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(i), ')$

0.5 ب) بين أن الضرب غير تبادلي في E

0.5 ج) تحقق أن: $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' & 0 \\ 0 & yy' \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix}$

0.5 2- بين أن $(E, ')$ زمرة غير تبادلية.

3- نعتبر المجموعة الجزئية F من E المعرفة بما يلي:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in i^* \right\}$$

0.5 أ) بين أن التطبيق j المعرفة بما يلي: $j(x) = M(x)$; $(x \hat{=} i^*)$ تشاكل من $(i^*, ')$ نحو $(E, ')$

1 ب) استنتج أن $(F, ')$ زمرة تبادلية يجب تحديد عنصرها المحايد.

التمرين 3: (3.5 نقط/اجباري)

ليكن m عدد عقدي غير منعدم.

الجزء الأول:

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z ، $z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$ (E)

0.5 1- حل في \mathbb{C} المعادلة (E) (لاحظ أن m حلا للمعادلة (E))

2- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) المخالفين للحل m

0.25 أ) تحقق أن: $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$

0.5 ب) في حالة: $m = 1 + e^{i\frac{p}{3}}$ ، أكتب على الشكل الجبري z_1 و z_2

الجزء الثاني:

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O; u, v)$

نعتبر النقط A و B ذات الألفاق على التوالي: $a = me^{i\frac{p}{3}}$ و $b = me^{-i\frac{p}{3}}$

ليكن P مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi p}{2\theta}$ و يحول O إلى A

و Q مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi p}{2\theta}$ و يحول A إلى B

و R مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi p}{2\theta}$ و يحول B إلى O

0.25 1- بين أن النقط O و A و B غير مستقيمة.

1 2- أ) بين أن لحق P هو: $p = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7p}{12}}$ وأن لحق R هو: $r = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7p}{12}}$

0.5 ب) بين أن لحق Q هو: $q = m\sqrt{2}\sin\frac{\pi p}{12}$

0.5 3- بين أن $OQ = PR$ و أن المستقيمين (OQ) و (PR) متعامدان.

التمرين 4: (13 نقطة/إجباري)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0; +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = x^3 \ln\left(\frac{x}{1}\right) + \frac{1}{x}, \quad x \in]0; +\infty[\text{ و } f(0) = 0$$

و ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O; i, j)$ (نأخذ: $\|i\| = \|j\| = 1\text{cm}$)

0.5 1- بتطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على الدالة f ا $\ln(t)$ في المجال $[x, x+1]$ ، بين أن:

$$(P) \quad \left(x \in]0; +\infty[\right) ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x}{1}\right) + \frac{1}{x} < \frac{1}{x}$$

0.5 2- أ) باستعمال العبارة (P) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

0.5 ب) باستعمال العبارة (P) بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا يتم تحديده اتجاهه.

0.75 3- (أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]p; +\infty[$ و أن :

$$f(x) = 3x^2 \ln(1+x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{3(1+x)} \quad (x \in]p; +\infty[)$$

0.5 (ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعاً على I (يمكن استعمال العبارة (P))

0.25 (ب) اعط جدول تغيرات f

4- لكل x من المجال $]p; +\infty[$ نضع: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

0.75 (أ) تحقق أن: $g'(x) = 2x \ln(1+x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1+x)}$; $(x \in]p; +\infty[)$

ثم استنتج أن الدالة g تزايدية قطعاً على i_+

0.5 (ب) بين أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل على i_+ ، حلاً وحيداً نرسم إليه بالرمز a

ثم تحقق أن a ينتمي إلى المجال $]2; 3[$ (نأخذ: $\ln 2 = 0.7$ و $\ln \frac{3}{2} = 1.5$)

0.5 (د) استنتج أن الحلول الوحيدة للمعادلة $f(x) = x$ هي: 0 و a

0.5 5- (أ) مثل مبيانيا المنحنى (C)

(حدد نصف المماس على اليمين في النقطة O و الفرع الشلجي للمنحنى (C))

0.25 (ب) بين أن الدالة f تقابل من I نحو I (نرمز بالرمز f^{-1} لتقابلها العكسي)

الجزء الثاني:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $0 < u_0 < a$ و لكل n من \mathbb{N} ، $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

0.5 1- بين بالترجع أن: $0 < u_n < a$; $(n \in \mathbb{N})$

0.5 2- (أ) بين أن: $g(p; a) =]p; 1[$

0.5 (ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً.

0.25 (ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة.

0.5 3- حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الجزء الثالث:

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال I بما يلي: $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$; $(x \in I)$

الصفحة	NS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع	
5		- مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	

1- أدرس حسب قيم x ، إشارة $F(x)$ 0.5

(ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على I و حدد مشتقتها الأولى F' 0.5

(ج) استنتج أن F تناقصية قطعاً على I 0.25

2- أ) بين أن: $F(x) \leq (1-x) \ln 2$; $x \in [1; +\infty[$ 0.5

(ب) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 0.25

3- أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: 0.5

$$F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \int_{x}^{1} \frac{t^3}{t+1} dt$$

(ب) أحسب $\int_{x}^{1} \frac{t^3}{t+1} dt$ لكل $x \in]-\infty; +\infty[$ (لاحظ أن: $\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$) 0.5

(ج) استنتج أن: $F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{x^4}{4} \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{x}$ 0.5

(د) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ ثم استنتج قيمة: $\int_0^1 f(t) dt$ 0.5

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)}{2n} \quad n \text{ منعدم طبيعي غير منعدم } n \text{ نضع:}$$

أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n من \mathbb{N}^* و لكل عدد صحيح طبيعي k من $\{0, 1, \dots, n-1\}$: 0.5

$$-\frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \frac{f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)}{2n} \leq \frac{f\left(\frac{2k}{2n}\right)}{2n} - \frac{1}{2n} f\left(\frac{2k}{2n}\right)$$

(ب) استنتج أن: $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f\left(\frac{2k}{2n}\right)}{2n} \leq v_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(\frac{2k}{2n}\right)}{2n}$; $x \in \mathbb{N}^*$ 0.5

$$\left(\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n} \right) \text{ (لاحظ أن:)}$$

(ج)- بين أن المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة ثم حدد نهايتها. 0.25

انتهى

الصفحة	1
4	
**1	

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2020
- عناصر الإجابة -

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS

NR 24

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

إنتباه: إذا أنجز المترشح التمرينين الاختياريين (بشكل كلي أو جزئي) تحتسب له فقط أحسن نقطة محصلة من بين النقطتين و ليس مجموع النقطتين.

سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين 1
0.5	إذا كان d قاسما مشتركا موجبا للعددين x و 13 فإنه قاسم مشترك للعددين 13 و 5 ، و منه $d = 1$	-1 (أ)
0.5	13 أولي و لا يقسم x و نطبق مبرهنة فيرما	(ب)
1	لدينا: [13] $5 \cdot 7x^3 \equiv 5 \pmod{13}$ إذن [13] $2 \cdot 5 \cdot x^3 \equiv 2 \pmod{13}$ لأن: [13] $2 \cdot 7 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{13}$	(ج)
0.5	لدينا: [13] $10 \cdot x^3 \equiv 10 \pmod{13}$ إذن [13] $10^4 \cdot (x^3)^4 \equiv 10^4 \pmod{13}$ و منه [13] $3 \cdot x^{12} \equiv 3 \pmod{13}$	(د)
1	إذا كان $\phi \in \phi'$ حل للمعادلة (D) فإنه حسب السؤال 1- لدينا [13] $1 \cdot x^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ و [13] $3 \cdot x^{12} \equiv 3 \pmod{13}$ إذن [13] $1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{13}$ و هذا غير ممكن.	-2

سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين 2
0.5	استقرار E في $(M_2(i), ')$	-1 (أ)
0.5	البرهان على عدم تبادلية الضرب في E	(ب)
0.5	التحقق	(ج)
0.5	$(E, ')$ زمرة غير تبادلية	-2
0.5	Z تشاكل	-3 (أ)
1	Z تشاكل و $F = (i^*) = Z$ و $(i^*, ')$ زمرة تبادلية..... 0.5..... العنصر المحايد هو $I = (1) = Z$ 0.5.....	(ب)

سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين 3
		الجزء الأول:
	لدينا: $(E) \hat{U} (z - m)(z^2 - mz + m^2) = 0$ بالإضافة إلى الحل m نجد الحلين: $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}m = e^{i\frac{p}{3}}m$ و $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}m = e^{-i\frac{p}{3}}m$	-1

الصفحة	NR 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
2		
4		

0.25	لدينا: $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = \frac{m}{m^2}$	(أ)	-2
0.5	نجد $z_1 = i\sqrt{3}$ و $z_2 = \sqrt{3}\frac{\pi\sqrt{3}}{2} - i\frac{1\sqrt{3}}{2}$	(ب)	
الجزء الثاني:			
0.25	النقط O و A و B غير مستقيمة		-1
1	0.5..... حساب p	(أ)	-2
	0.5..... حساب r		
0.5 حساب q	(ب)	
0.5	لدينا: $\frac{p-r}{q} = i$ و نستنتج أن: $OQ = PR$ 0.25.....		-3
	0.25..... $(OQ)^{\wedge} (PR)$		

سليم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين 4	
الجزء الأول:			
0.5	0.25..... $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c_x}$; $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c_x}$	-1	
	0.25..... التأيير: $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$		
0.5	لدينا: $\frac{x^2}{1+x} < \frac{f(x)}{x} < x$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$	(أ) -2	
0.5	لدينا: $\frac{x^2}{1+x} < \frac{f(x)}{x} < x$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$	(ب)	
0.75	0.25..... الدالة قابلة للاشتقاق	(أ)	-3
	0.25..... حساب $f'(x)$		
0.5	لدينا: $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)} > \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} > 0$	(ب)	
	إذن: $f'(x) > 0$		
0.25	جدول تغيرات f	(ج)	
0.75	0.5..... حساب $g'(x)$	(أ) -4	

الصفحة	NR 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	
3			
4			
		لدينا: $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{2(1+x)}$ و $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}$ إذن:	
0.25		$g'(x) > 0$	
0.5	(ب)	ميرنة القيم الوسيطة تعطي وجود a و الرتبة القطعية للدالة g تعطي وحدانيته أو كذلك g تقابل من $]0; +\infty[$ إلى $]0; +\infty[$	
0.25		نتحقق من $g(1) < 1 < g(2)$	
0.5	(د)	حلول المعادلة: $f(x) = x \hat{=} x = 0$ أو $x = 0$	
0.5	(أ)	إنشاء المنحنى	-5
0.25	(ب)	f تقابل من I نحو I	
الجزء الثاني:			
0.5		الترجع و f^{-1} تزايدية و كون $f^{-1}(0) = 0$ و $f^{-1}(a) = a$	-1
0.5	(أ)	$g(D; a) =]0; 1[$	
0,5	(ب)	من أجل $0 < x < a$ ، لدينا $0 < g(x) < 1$ بما أن $0 < u_n < a$ فإن $0 < f(u_n) < u_n$ إذن: $0 < u_n < f^{-1}(u_n) = u_{n+1}$	-2
0.25	(ج)	متتالية تزايدية و مكبورة	
0.5		إذا وضعنا: $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ فإن $0 < u_0 \leq l \leq a$ لأن $0 < u_0 < u_n < a$; $(n^3 - 1)$ و بما أن f^{-1} متصلة على $[0; a]$ (و بالخصوص في l) فإن l هي حل المعادلة $f(x) = l$ إذن $l = a$	-3
الجزء الثالث:			
0.5	(أ)	لدينا $f(x)^3 \geq 0$ إذن F موجبة من أجل $1 \leq x \leq 0$ و سالبة من أجل $1 \leq x^3$	
0.5	(ب)	F قابلة للاشتقاق على I	-1
0.25	(ج)	$F'(x) = -f(x)$; $(x \in I)$	
0.5	(أ)	لدينا: $f(x)^3 \ln 2$; $x^3 - 1$ إذن $\int_1^x f(t) dt^3 = (x-1) \ln 2$	-2
0.25	(ب)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$	
0.5	(أ)	مكاملة بالأجزاء	
0.5	(ب)	$\int_x^1 \frac{t^3}{t+1} dt = \frac{5}{6} - \ln 2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)$	-3
0.5	(ج)	المتساوية	

0.5	$0.25 \dots \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{5}{24}$	(د)	
0.5	$0.25 \dots \int_0^1 f(t) dt = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{5}{24}$: إذن F متصلة على اليمين في 0		
0.5	<p>تطبيق مبرهنة أو متفاوتة التزايدات المنتهية على الدالة f في المجال $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ مع</p> <p style="text-align: center;"> $f(\frac{k}{n}) \leq f(x) \leq f(\frac{k+1}{n})$; $f(\frac{k}{n}) \leq f(x) \leq f(\frac{k+1}{n})$ </p>	(أ)	-4
0.5	نلاحظ أن: $\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}$	(ب)	
0.25	<p>مجاميع ريمان المرتبطة بالدالة f $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(\frac{k}{n})$ و $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f(\frac{k}{n})$</p> <p>المتصلة على القطعة $[0,1]$ إذن المتتاليتين $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f(\frac{k}{n})$ و $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(\frac{k}{n})$ متقاربتين و</p> <p>لهما نفس النهاية التي هي $F(0) = \int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{24}$</p> <p>و منه المتتالية (v_n) متقاربة (خاصية تلاطير النهايات) و نهايتها $-\frac{1}{2} F(0) = -\frac{5}{48}$</p>	(ح)	