



الصفحة	NS 22	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم التجريبية مسلك العلوم الفيزيائية ومسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الزراعية
2		
3		
التمرين الأول (4 نقط):		
<p>لتكن <math>(u_n)</math> المتتالية العددية المعرفة كما يلي: <math>u_0 = \frac{3}{2}</math> و <math>u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}</math> لكل <math>n</math> من <math>\mathbb{N}</math></p>		
0.25	(1)	احسب $u_1$
0.5	(2)	بين بالترجع أن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $u_n > 0$
1	(3)	أ) بين أن $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أن $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$
0.5	(ب)	احسب النهاية $\lim u_n$
<p>(4) نعتبر <math>(v_n)</math> المتتالية العددية المعرفة ب <math>v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}</math> لكل <math>n</math> من <math>\mathbb{N}</math></p>		
0.75	(أ)	بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$
1	(ب)	حدد $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$
التمرين الثاني (5 نقط):		
<p>(1) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية <math>\square</math> المعادلة: <math>(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0</math></p>		
0.5	(أ)	تحقق من أن مميز المعادلة $(E)$ هو $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$
1	(ب)	استنتج حل المعادلة $(E)$
<p>(2) نعتبر الأعداد العقدية: <math>a = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})</math> و <math>b = 1 + i\sqrt{3}</math> و <math>c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}</math></p>		
0.75	(أ)	تحقق من أن $b\bar{c} = a$ و استنتج أن $ac = 4b$
0.5	(ب)	أكتب العديدين العقديين $b$ و $c$ على الشكل المثلي
0.5	(ج)	استنتج أن $a = 4\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$
<p>(3) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر <math>(O, \vec{u}, \vec{v})</math> ، نعتبر النقط <math>B</math> و <math>C</math> و <math>D</math> التي أحاقها على التوالي هي <math>b</math> و <math>c</math> و <math>d</math> ، حيث <math>d = a^4</math>.</p>		
<p>ليكن <math>z</math> لحق نقطة <math>M</math> و <math>z'</math> لحق النقطة <math>M'</math> صورة النقطة <math>M</math> بالدوران <math>R</math> الذي مركزه <math>O</math> وزاويته <math>\frac{\pi}{12}</math>.</p>		
0.5	(أ)	تحقق أن $z' = \frac{1}{4}az$
0.25	(ب)	حدد صورة النقطة $C$ بالدوران $R$
0.25	(ج)	حدد طبيعة المثلث $OBC$ .
0.75	(د)	بين أن $a^4 = 128b$ و استنتج أن النقط $O$ و $B$ و $D$ مستقيمية

الصفحة	3	NS 22	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم التجريبية مسلك العلوم الفيزيائية ومسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الزراعية
3			

التمرين الثالث (4 نقط) :

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بما يلي :  $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

(1) أ) بين أن لكل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  ،  $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$  0.5

ب) بين أن الدالة  $g$  تزايدية قطعا على المجال  $]1; +\infty[$  0.5

ج) استنتج أن لكل  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  ،  $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$  (لاحظ أن  $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$ ) 0.5

د) بين أن لكل  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  ،  $0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$  ، ثم استنتج النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$  1

(2) أ) بين أن الدالة  $G$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بما يلي :  $G(x) = x \left( -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right)$  هي دالة أصلية للدالة  $g$  0.75

ب) احسب التكامل  $\int_1^4 g(x)dx$  0.75

المسألة (7 نقط) :

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

و  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة : 2cm)

(1) بين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  وأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  0.5

(2) أ) برهن أن المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = -x + \frac{5}{2}$  مقارب للمنحنى  $(C)$  بجوار  $-\infty$  0.5

ب) حل المعادلة  $e^{x-2} - 4 = 0$  ثم بين أن المنحنى  $(C)$  يوجد تحت  $(\Delta)$  على المجال  $[2 + \ln 4, +\infty[$  وفوق  $(\Delta)$  على المجال  $]-\infty, 2 + \ln 4]$  0.75

(3) بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  ثم أول النتيجة هندسيا 0.5

(4) أ) بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$  0.5

ب) ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  0.25

(5) احسب  $f''(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ثم بين أن  $A(2, 2)$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C)$  0.75

(6) أثبت أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  بحيث  $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$  0.5

(7) أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C)$  في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (نأخذ القيمتين المقربتين التاليين :  $\ln 2 \approx 0,7$  و  $\ln 3 \approx 1,1$ ) 1

(8) أ) بين أن الدالة  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$  معرفة على  $\mathbb{R}$  0.5

ب) أنشئ في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  المنحنى الممثل للدالة  $f^{-1}$  (لاحظ أن المستقيم  $(\Delta)$  عمودي على المنصف الأول للمعلم) 0.75

ج) أحسب  $(f^{-1})'(2 - \ln 3)$  (لاحظ أن  $(f^{-1})'(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$ ) 0.5

## تصحيح وطني 2020

### الدورة العادية - علوم تجريبية

#### التمرين الأول (4 نقاط)

لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة كما يلي :  $u_0 = \frac{3}{2}$  و  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+5}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

(1) أحسب $u_1$	0.25
(2) بين بالترجع أن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $u_n > 0$	0.5
(3) أ) بين أن $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أن $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$	1
ب) أحسب النهاية $\lim u_n$	0.5
(4) نعتبر $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة ب $v_n = \frac{4u_n}{2u_n+3}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$	
أ) بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$	0.75
ب) حدد $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$	1

#### التمرين الثاني (5 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$ : (E)	
أ) تحقق من أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta = -4\sqrt{6} - \sqrt{2}^2$	0.5
ب) استنتج حل المعادلة (E)	1
(2) نعتبر الأعداد العقدية : $a = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i\sqrt{6} - \sqrt{2}$ و $b = 1 + i\sqrt{3}$ و $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$	
أ) تحقق من أن $b\bar{c} = a$ و استنتج أن $ac = 4b$	0.75
ب) أكتب العددين العقديين $b$ و $c$ على الشكل المثلثي	0.5
ج) استنتج أن $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$	0.5
(3) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $O, \vec{u}, \vec{v}$ ، نعتبر النقط $B$ و $C$ و $D$ التي ألقاها على التوالي هي $b$ و $c$ و $d$ حيث $d = a^4$ .	
ليكن $z$ لحق نقطة $M$ من المستوى و $z'$ لحق النقطة $M'$ صورة النقطة $M$ بالدوران $R$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{12}$	
أ) تحقق أن $z' = \frac{1}{4}az$	0.5
ب) حدد صورة النقطة $C$ بالدوران $R$	0.25
ج) حدد طبيعة المثلث $OBC$	0.25
د) بين أن $a^4 = 128b$ و استنتج أن النقط $O$ و $B$ و $D$ مستقيمية	0.75

## التمرين الثالث (4 نقاط)

نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على $0, +\infty$ بما يلي : $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$	
(1) أ) بين أن لكل $x$ من المجال $0, +\infty$ ، $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$	0.5
ب) بين أن الدالة $g$ تزايدية على المجال $1, +\infty$	0.5
ج) استنتج أن لكل $x$ من المجال $1, +\infty$ ، $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ (لاحظ أن $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$ )	0.5
د) بين أن لكل $x$ من المجال $1, +\infty$ ، $0 \leq \frac{\ln x^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ ثم استنتج النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^3}{x^2}$	1
(2) أ) بين أن الدالة $G$ المعرفة بما يلي : $G(x) = x \left( -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right)$ هي دالة أصلية للدالة $g$ على $0, +\infty$	0.75
ب) أحسب التكامل $\int_1^4 g(x) dx$	0.75

## المسألة (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2} - 4$	
و $C$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $O, \vec{i}, \vec{j}$ (الوحدة : $2cm$ )	
(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	0.5
(2) أ) برهن أن المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب للمنحنى $C$ بجوار $-\infty$	0.5
ب) حل المعادلة $e^{x-2} - 4 = 0$ ثم بين أن المنحنى $C$ يوجد فوق $\Delta$ على المجال $-\infty, 2 + \ln 4$ وتحت $\Delta$ على المجال $2 + \ln 4, +\infty$	0.75
(3) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ ثم أول النتيجة هندسيا	0.5
(4) أ) بين أن لكل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x) = -e^{x-2} - 1$	0.5
ب) ضع جدول تغيرات الدالة $f$	0.25
(5) أحسب $f''(x)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ ثم بين أن $A(2, 2)$ نقطة انعطاف للمنحنى $C$	0.75
(6) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ بحيث $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$	0.5
(7) أنشئ $\Delta$ و $C$ في نفس المعلم $O, \vec{i}, \vec{j}$ (نأخذ القيمتين المقربتين التاليتين : $\ln 2 \simeq 0,7$ و $\ln 3 \simeq 1,1$ )	1
(8) أ) بين أن الدالة $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ معرفة على $\mathbb{R}$	0.5
ب) أنشئ في نفس المعلم $O, \vec{i}, \vec{j}$ المنحنى الممثل للدالة $f^{-1}$ (لاحظ أن المستقيم $\Delta$ عمودي على المنصف الأول للمعلم)	0.75
ج) أحسب $f^{-1}'(2 - \ln 3)$ (لاحظ أن $f^{-1}(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$ )	0.5

## تصحيح التمرين الأول

$$u_1 = \frac{2u_0}{2u_0 + 5} = \frac{2 \times \frac{3}{2}}{2 \times \frac{3}{2} + 5} = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8} \quad (1)$$

(2) لنبين بالترجع أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $u_n > 0$  ✓

من أجل  $n=0$  ✓

لدينا :  $u_0 = \frac{3}{2}$

إذن :  $u_0 > 0$

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  ✓

▷ نفترض أن :  $u_n > 0$

▷ و نبين أن :  $u_{n+1} > 0$

حسب الافتراض ، لدينا  $u_n > 0$

إذن  $2u_n > 0$  و  $2u_n + 5 > 0$

إذن  $\frac{2u_n}{2u_n + 5} > 0$

و منه  $u_{n+1} > 0$

✓ نستنتج أن : لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $u_n > 0$

(3 أ)

○ ليكن  $n \in \mathbb{N}$

▪ نعلم أن  $u_n > 0$  إذن من الواضح أن  $u_{n+1} > 0$

▪ لدينا  $5 \leq 2u_n + 5$

إذن  $\frac{1}{2u_n + 5} \leq \frac{1}{5}$

إذن  $\frac{1}{2u_n + 5} \times 2u_n \leq \frac{1}{5} \times 2u_n$

إذن  $u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$

نستنتج أن  $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

○ لنبين بالترجع أن  $0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

✓ من أجل  $n=0$

$$\text{لدينا : } u_0 = \frac{3}{2} \text{ و } \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{3}{2}$$

$$\text{إذن : } 0 < u_0 \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

✓ ليكن  $n \in \mathbb{N}$

$$\triangleright \text{ نفترض أن } 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\triangleright \text{ و نبين أن } 0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

$$\boxed{(1) 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n} \text{ نعلم أن}$$

$$\text{وحسب الافتراض لدينا : } 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\boxed{(2) 0 < \frac{2}{5} u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}} \text{ إذن}$$

$$\text{من (1) و (2) نستنتج أن } 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

$$\text{وبالتالي : } 0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

$$\text{✓ نستنتج أن } 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

(ب)

$$\circ \text{ لدينا } 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$\circ \text{ بما أن } -1 < \frac{2}{5} < 1 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \text{ و منه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

$$\text{إذن حسب مبرهنة الدرك : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

(4) أ) ليكن  $n \in \mathbb{N}$   
لدينا :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \frac{4u_{n+1}}{2u_{n+1} + 3} \\
 &= \frac{4\left(\frac{2u_n}{2u_n + 5}\right)}{2\left(\frac{2u_n}{2u_n + 5}\right) + 3} \\
 &= \frac{\frac{8u_n}{2u_n + 5}}{\frac{4u_n + 6u_n + 15}{2u_n + 5}} \\
 &= \frac{8u_n}{10u_n + 15} \\
 &= \frac{2 \times 4u_n}{5 \times (2u_n + 3)} \\
 &= \frac{2}{5} \times v_n
 \end{aligned}$$

إذن :  $v_{n+1} = \frac{2}{5} \times v_n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

و منه  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{2}{5}$

ب) ليكن  $n \in \mathbb{N}$

$$v_0 = \frac{4u_0}{2u_0 + 3} = \frac{4\left(\frac{3}{2}\right)}{2\left(\frac{3}{2}\right) + 3} = \frac{6}{6} = 1 \text{ و } q = \frac{2}{5} \text{ و حدها الأول } 1 \text{ لدينا } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{2}{5} \triangleright$$

$$v_n = v_0 \times q^n \text{ إذن}$$

$$v_n = 1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \text{ إذن}$$

$$\text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \quad \boxed{v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n} \text{ و منه :}$$

لدينا:  $\triangleright$

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3} &\Leftrightarrow 4u_n = 2u_n v_n + 3v_n \\
&\Leftrightarrow 4u_n - 2u_n v_n = 3v_n \\
&\Leftrightarrow u_n(4 - 2v_n) = 3v_n \\
&\Leftrightarrow u_n = \frac{3v_n}{4 - 2v_n}
\end{aligned}$$

لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ 

$$u_n = \frac{3\left(\frac{2}{5}\right)^n}{4 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

إذن :

## تصحيح التمرين الثاني

(1 أ)

$$\begin{aligned}
\Delta &= -2\sqrt{2} + \sqrt{6}^2 - 4 \times 1 \times 16 \\
&= 4(8 + 2\sqrt{12}) - 64 \\
&= -32 + 8\sqrt{12} \\
&= -4(8 - 2\sqrt{12}) \\
&= -4(\sqrt{6}^2 - 2\sqrt{6}\sqrt{2} + \sqrt{2}^2) \\
&= -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2
\end{aligned}$$

(ب) لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$ 

$$\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 \text{ لدينا}$$

إذن للمعادلة حلين عقديين مترافقين

$$z = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6} + i2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6} - i2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{6} + i\sqrt{6} - \sqrt{2} \quad \text{أو} \quad z = \sqrt{2} + \sqrt{6} - i\sqrt{6} - \sqrt{2}$$

و بالتالي :  $S = \sqrt{2} + \sqrt{6} - i\sqrt{6} - \sqrt{2} ; \sqrt{2} + \sqrt{6} + i\sqrt{6} - \sqrt{2}$

(أ) (2)

○

$$\begin{aligned}
 b\bar{c} &= (1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2}) \\
 &= \sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6} \\
 &= \sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \\
 &= a
 \end{aligned}$$

○

$$\begin{aligned}
 ac &= b\bar{c}c \\
 &= b \times |c|^2 \\
 &= b \times \left( \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} \right)^2 \\
 &= 4b
 \end{aligned}$$

(ب)

▷ لدينا :  $b = 1 + i\sqrt{3}$ 

$$|b| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2 : b \text{ معيار العدد}$$

$$b = 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

▷ لدينا :  $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ 

$$|c| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2 : c \text{ معيار العدد}$$

$$c = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

(ج) لدينا  $ac = 4b$ 

$$a = 4 \frac{b}{c} \quad \text{إذن}$$

$$a = 4 \frac{2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)}{2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)} = 4 \times \left( \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \right) = 4 \left( \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) \text{ إذن}$$

(3 أ)

$z'$  صورة النقطة  $M$  بالدوران  $R$  الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{12}$

$$\begin{aligned} z' - 0 &= e^{i\frac{\pi}{12}}(z - 0) \\ z' &= \left( \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) z \\ z' &= \frac{1}{4}az \end{aligned}$$

(ب) لنحدد صورة النقطة  $C$  بالدوران  $R$

$$\frac{1}{4}ac = \frac{1}{4} \times 4b = b \quad \text{لدينا}$$

إذن  $B$  هي صورة  $C$  بالدوران  $R$

(ج) لدينا  $B$  هي صورة  $C$  بالدوران  $R$

$$\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} \equiv \frac{\pi}{12} \quad 2\pi \quad \text{و} \quad OC = OB$$

و منه المثلث  $OBC$  متساوي الساقين

(د)

$$a = 4 \left( \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) \quad \text{لدينا} \quad \triangleright$$

إذن حسب علاقة موافر :

$$a^4 = 4^4 \left( \cos\left(4\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(4\frac{\pi}{12}\right) \right) = 256 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 256 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 128(1 + i\sqrt{3}) = 128b$$

$$\frac{d-0}{b-0} = \frac{a^4}{b} = \frac{128b}{b} = 128 \quad \triangleright$$

بما أن  $\frac{d-0}{b-0} \in \mathbb{R}$  فإن النقط  $O$  و  $B$  و  $D$  مستقيمة.

## تصحيح التمرين الثالث

(1) أ) الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $0, +\infty$ ليكن  $x \in 0, +\infty$ 

$$g'(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x \quad \text{لدينا:} \quad g'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

إذن: لكل  $x$  من المجال  $0, +\infty$  ،  $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$ (ب) ليكن  $x \in 1, +\infty$ 

$$\text{لدينا} \quad g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

بما أن  $x > 0$  فإن إشارة  $g'(x)$  هي إشارة  $\sqrt{x}-1$ نعلم أن  $x \geq 1$ إذن  $\sqrt{x} \geq 1$ إذن  $\sqrt{x}-1 \geq 0$ ومنه  $g'(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $1, +\infty$ وبالتالي الدالة  $g$  تزايدية على المجال  $1, +\infty$ (ج) ليكن  $x \in 1, +\infty$ ▷ لدينا  $1 \leq x$  إذن  $0 \leq \ln x$ ▷ ولدينا  $1 \leq x$  و الدالة  $g$  متصلة و تزايدية على المجال  $1, +\infty$ إذن  $g(1) \leq g(x)$ إذن  $0 \leq 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$  (لأن  $g(1) = 0$ )إذن  $\ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$ وبما أن  $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$ فإن  $\ln x \leq 2\sqrt{x}$ ○ نستنتج أن لكل  $x$  من المجال  $1, +\infty$  ،  $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ 

(د)

▷ ليكن  $x \in 1, +\infty$ لدينا حسب نتيجة السؤال (1) (ج):  $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ إذن:  $0 \leq \ln x^3 \leq 8x\sqrt{x}$

$$\text{إذن : } 0 \leq \frac{\ln x^3}{x^2} \leq \frac{8x\sqrt{x}}{x^2}$$

$$\text{و منه : لكل } x \text{ من المجال } 1, +\infty, 0 \leq \frac{\ln x^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$$

$$\triangleright \text{ لدينا لكل } x \text{ من المجال } 1, +\infty, 0 \leq \frac{\ln x^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\text{إذن حسب مبرهنة الدرك : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^3}{x^2} = 0$$

(أ)

✓ الدالة  $G$  قابلة للاشتقاق على  $0, +\infty$  (كجاء دالتين قابلتين للاشتقاق على  $0, +\infty$ )

✓ ليكن  $x \in 0, +\infty$

لدينا :

$$\begin{aligned} G' x &= \left( x \left( -1 + \frac{4}{3} \sqrt{x} - \ln x \right) \right)' \\ &= x' \left( -1 + \frac{4}{3} \sqrt{x} - \ln x \right) + x \left( -1 + \frac{4}{3} \sqrt{x} - \ln x \right)' \\ &= 1 \times \left( -1 + \frac{4}{3} \sqrt{x} - \ln x \right) + x \times \left( \frac{4}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) \\ &= -1 + \frac{4}{3} \sqrt{x} - \ln x + \frac{2}{3} \sqrt{x} - 1 \\ &= 2\sqrt{x} - 2 - \ln x \\ &= g x \end{aligned}$$

إذن : لكل  $x$  من المجال  $0, +\infty$   $G' x = g x$

○ وبالتالي  $G$  هي دالة أصلية للدالة  $g$  على  $0, +\infty$

(ب)

$$\begin{aligned} \int_1^4 g x dx &= [G x]_1^4 \\ &= G 4 - G 1 \\ &= 4 \left( \frac{5}{3} - \ln 4 \right) - 1 \left( \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{19}{3} - 4 \ln 4 \end{aligned}$$

## تصحيح المسألة

(1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} e^{x-2} - 4 = +\infty \quad \triangleright$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2} e^{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^x}{2e^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} - 4 = -4 \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} e^{x-2} - 4 = -\infty \quad \triangleright$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{5}{2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2} e^{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{e^x}{2e^2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} - 4 = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} e^{x-2} e^{x-2} - 4 = 0 \quad \text{(2 أ) لدينا :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2} e^{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^x}{2e^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} - 4 = -4 \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

إذن المستقيم  $\Delta$  الذي معادلته  $y = -x + \frac{5}{2}$  مقارب مائل للمنحنى  $C$  بجوار  $-\infty$

(ب)

$$\triangleright \text{لنحل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة : } e^{x-2} - 4 = 0$$

لدينا :

$$e^{x-2} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{x-2} = 4$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \ln 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \ln 4$$

إذن :  $S = 2 + \ln 4$ 

$\triangleright$  لندرس الوضع النسبي للمنحنى  $C$  و المستقيم  $\Delta$

ليكن  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{لدينا : } f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{x-2} - e^{x-2} - 4$$

$$\text{نعلم أن } e^{x-2} > 0 \text{ إذن إشارة } f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) \text{ هي إشارة } -\frac{1}{2}e^{x-2} - 4$$

$x$	$-\infty$	$2+\ln 4$	$+\infty$
$(-1/2)(Exp(x-2)-4)$	+	0	-

✓ على المجال  $-\infty, 2+\ln 4$  :

$$\text{لدينا : } f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) \geq 0$$

إذن المنحنى  $C$  يوجد فوق  $\Delta$

✓ و على المجال  $2+\ln 4, +\infty$  :

$$\text{لدينا : } f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) \leq 0$$

إذن المنحنى  $C$  يوجد تحت  $\Delta$

(3)

✓ لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2} - e^{x-2} - 4}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} - \frac{1}{2} \frac{e^{x-2}}{x} - e^{x-2} - 4 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2} \frac{e^{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2e^2} \frac{e^x}{x} = -\infty \quad \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \right) \text{ لأن} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} - 4 = +\infty \end{array} \right.$$

$$\text{✓ بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

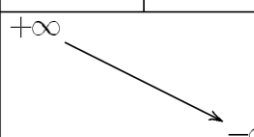
فإن المنحنى  $C$  يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتيب بجوار  $+\infty$

(4) أ) الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ليكن  $x \in \mathbb{R}$ 

لدينا :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left( -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} e^{x-2} - 4 \right)' \\
&= -1 - \frac{1}{2} \left( e^{x-2} e^{x-2} + e^{x-2} e^{x-2} - 4 \right)' \\
&= -1 - \frac{1}{2} \left( x-2 e^{x-2} e^{x-2} + e^{x-2} x-2 e^{x-2} \right) \\
&= -1 - \frac{1}{2} e^{x-2} e^{x-2} + e^{x-2}^2 \\
&= - \left( 1 + \frac{1}{2} 2 e^{x-2}^2 - 4 e^{x-2} \right) \\
&= -1 + e^{x-2}^2 - 2 e^{x-2} \\
&= - e^{x-2} - 1^2
\end{aligned}$$

إذن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = - e^{x-2} - 1^2$ (ب) جدول تغيرات الدالة  $f$ 

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$0$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$			$-\infty$

(5)  $f'$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ليكن  $x \in \mathbb{R}$ 

لدينا :

$$\begin{aligned}
f'' x &= -e^{x-2} - 1^2 \\
&= -2e^{x-2} - 1^2 e^{x-2} - 1 \\
&= -2e^{x-2} - 1^2 e^{x-2} - 1 \\
&= -2e^{x-2} - e^{x-2} - 1 \\
&= -3e^{x-2} - 1
\end{aligned}$$

إذن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'' x = -3e^{x-2} - 1$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$

بما أن  $f''$  تنعدم و تغير إشارتها عند  $2$  فإن  $A(2,2)$  نقطة انعطاف للمنحنى  $C$  ( $f(2)=2$ )

(6)

✓ لدينا  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  ( كمجموع و جداء دوال متصلة على  $\mathbb{R}$  )

✓ بما أن  $f' x \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  و  $x=2 \Leftrightarrow f' x = 0$  فإن  $f$  تناقصية قطعاً على  $\mathbb{R}$

$$f(2+\ln 3) = -2+\ln 3 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2+\ln 3-2} e^{2+\ln 3-2} - 4 = 2 - \ln 3$$

$$f(2+\ln 3) > 0 \text{ إذن}$$

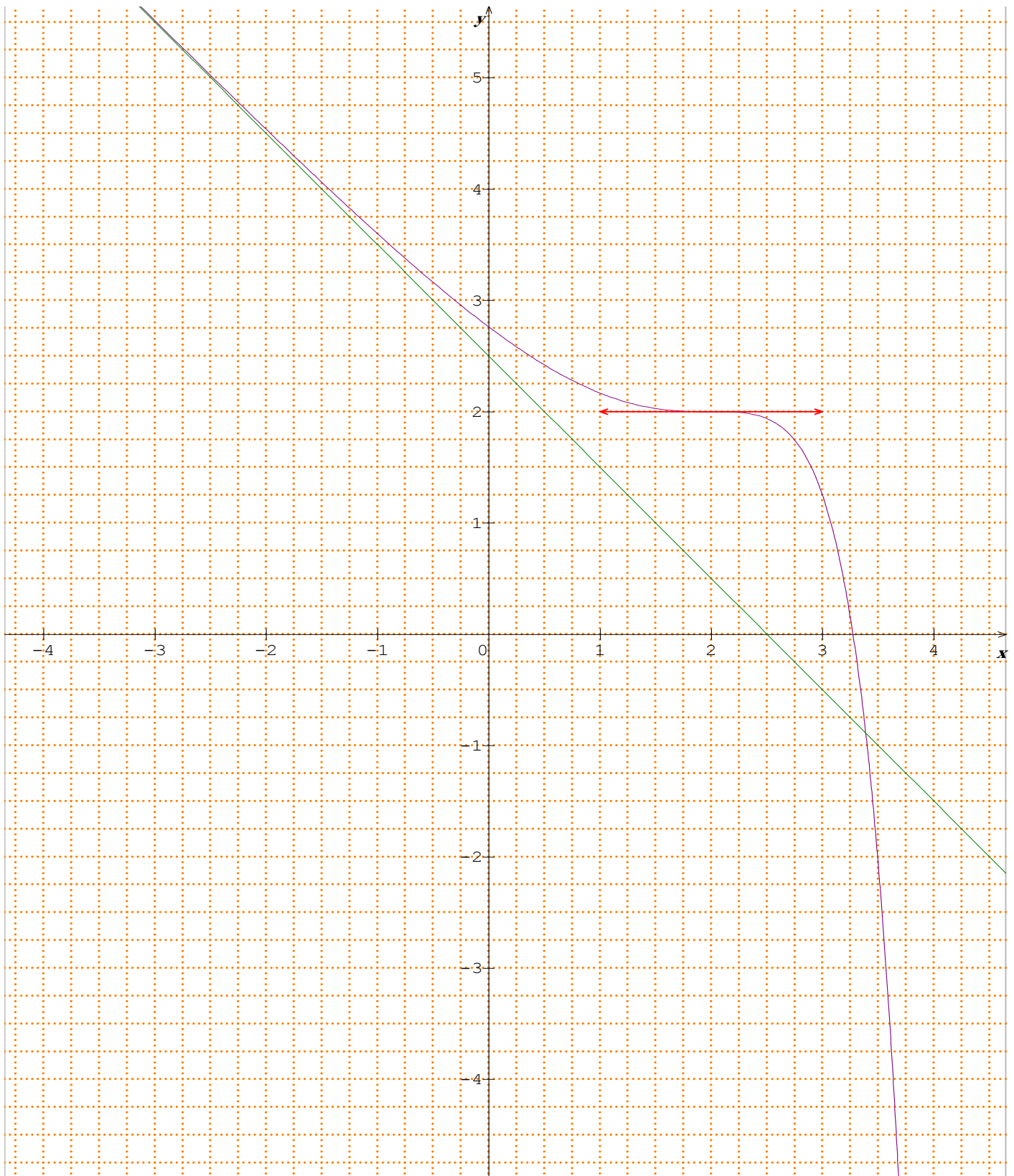
$$f(2+\ln 4) = -2+\ln 4 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2+\ln 4-2} e^{2+\ln 4-2} - 4 = \frac{1}{2} - \ln 4$$

$$f(2+\ln 4) < 0 \text{ إذن}$$

$$\text{و منه } f(2+\ln 3) \times f(2+\ln 4) < 0$$

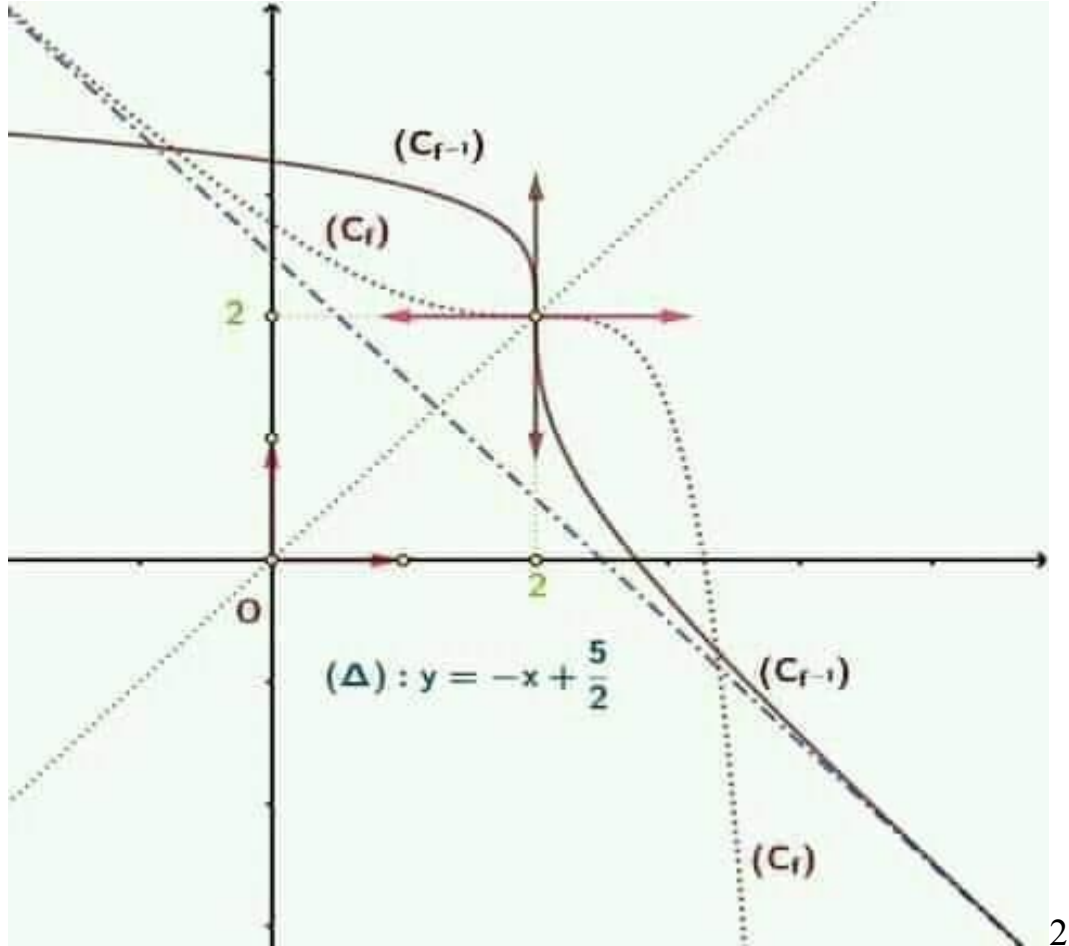
و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطة : المعادلة  $f(x)=0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  بحيث

$$2+\ln 3 < \alpha < 2+\ln 4$$



(8) أ) بما أن  $f$  متصلة و تناقصية قطعاً على  $\mathbb{R}$  فإن  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$  معرفة على مجال  $J$  نحو  $\mathbb{R}$  حيث  $J = f \mathbb{R} = f ]-\infty, +\infty[ = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[ = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$

(ب)



$$f^{-1}'(2 - \ln 3) = f^{-1}'(f(2 + \ln 3)) = \frac{1}{f'(2 + \ln 3)} = \frac{1}{-4} \quad (\text{ج})$$





الصفحة	NR 22	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - عناصر الإجابة
2		مادة: الرياضيات- شعبة العلوم التجريبية مسلك العلوم الفيزيائية ومسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الزراعية

تقبل كل طريقة صحيحة للبرهان	0.5	أ-2
0.25 لحل المعادلة و 0.25 للوضع النسبي في كل مجال	0.75	ب-2
0.25 للنهاية و 0.25 للتأويل الهندسي	0.5	3
	0.5	أ-4
إبراز قيمة $f'(2)$ في الجدول غير ضرورية	0.25	ب-4
0.25 لحساب المشتقة الثانية و 0.5 لتعليل نقطة الانعطاف	0.75	5
	0.5	6
أنظر المبيان أسفله	1	7
	0.5	أ-8
أنظر المبيان أسفله	0.75	ب-8
	0.5	ج-8

