Exercice 1 : (2,5 pts)

1) a - Résoudre dans ℝ l'équation suivante :

$$x^2+4x-5=0$$

b – Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation suivante :

$$\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln 2x$$

2) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation suivante :

$$\ln x+\ln(x+1)\geq \ln(x^2+1)$$

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=\frac{U_n}{5+8U_n}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad \text{et}\quad U_0=1$$

1) Montrer que : $U_n>0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n=\frac{1}{U_n}+2\qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

a – Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 5 puis écrire V_n en fonction de n.

b – Montrer que $U_n=\dfrac{1}{3\times 5^n-2}\quad \forall n\in\mathbb{N}$ et en déduire $\lim U_n$

Exercice 3 : (5 pts)

1) Résoudre dans ℂ l'équation : $Z^2-18Z+82=0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a=9+i$, $b=9-i$, $c=11-i$

a – Montrer que : $\dfrac{c-b}{a-b}=-i$ puis en déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

b – Ecrire 4(1 – i) sous forme trigonométrique

c – Montrer que : $(c-a)(c-b)=4(1-i)$ puis en déduire que $AC\times BC=4\sqrt{2}$

d – Soit z l'affixe de point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$. Montrer que $z'=-iz+10+8i$ puis vérifier que l'affixe du point C′ image du point C par la rotation R est 9 – 3i

Problème : : (9,5 pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur ℝ par :

$$g(x)=(1-x)e^x-1$$

1) a – Montrer que $g'(x)=-xe^x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

b – Montrer que g est décroissante sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0]$ puis vérifier que g(0) = 0

2) En déduire que $g(x)\leq 0 \quad \forall\in$ ℝ

Partie II :

On considère la fonction f définie sur ℝ par

$$f(x)=(2-x)e^x-x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

b – Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ puis en déduire que (C_f) admet au voisinage de + ∞ une branche parabolique de direction à déterminer.

2) a – Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$ (On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$)

b – Montrer que la droite (D) : y = – x est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de – ∞

3) a – Montrer que $f'(x)=g(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

b – Interpréter géométriquement le résultat f ′(0) = 0

c – Montrer que f est strictement décroissante sur ℝ et dresser le tableau des variations de f.

4) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α dans ℝ et que $\dfrac{3}{2}<\alpha<2$ (on admet $e^{\frac{3}{2}}>3$)

5) a-Résoudre f(x) + x = 0 et en déduire que (C_f) et (D) Se coupent en un point A(2 ;–2).

b – Etudier le signe de f(x) + x sur ℝ.

c – En déduire que (C_f) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;2[$ et en dessous de (D) sur $]2,+\infty[$

6) a – Montrer que (C_f) possède un seul point d'inflexion de cordonnées (0 ; 2)

b - Construire la droite (D) et la courbe (C_f)

7) a – A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\displaystyle\int_{-1}^{0}(2-x)e^x\,dx=3-\frac{4}{e}$

b – En déduire en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations x = 0 et x = – 1.