

**Exercice 1 : (2,5 pts)**1) a - Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$  l'équation admet deux solutions distincts.

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{2+4}{2} = 3 \quad \text{et} \quad = \frac{2-4}{2} = -1$$

$$S = \{-1; 3\}$$

b - Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0 \quad e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{(e^x)^2 - 2e^x - 3}{e^x} = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 3 = 0$$

$$\text{On pose } t = e^x \text{ donc } t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\text{donc } t = 3 \text{ ou } t = -1$$

$$\text{donc } e^x = 3 \text{ ou } e^x = -1 \text{ or } e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{donc } e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$$

$$\text{D'où } S = \{\ln 3\}$$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :

$$e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$$

$$e^{x+1} - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{x+1} \geq e^{-x} \Leftrightarrow x+1 \geq -x$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } S = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

**Exercice 2 : (4 pts)**1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Z^2 - 6Z + 18 = 0$ 

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 18 = -36 < 0$$

$$= (6i)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{6+6i}{2} = 3+3i \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = 3-3i$$

$$\text{D'où } S = \{3-3i; 3+3i\}$$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé

direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  on considère les points A et Bd'affixes respectives  $a = 3 + 3i$  ,  $b = 3 - 3i$ 

a - Ecrire a et b sous forme trigonométrique

$$|a| = |3(1+i)| = 3|1+i| = 3\sqrt{1^2+1^2} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3(1+i) = 3\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 3\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{d'où } a = \left[ 3\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\text{On a } b = \bar{a} \quad \text{donc } b = \left[ 3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$$

b - Montrer que b' l'affixe du point B' image du point B par la translation de vecteur  $\vec{OA}$  est 6B' image du point B par la translation de vecteur  $\vec{OA}$ 

$$\text{Donc } b' = b + \text{aff}(\vec{OA}) = b + a$$

$$b' = 3 - 3i + 3 + 3i = 6 \quad \text{d'où } b' = 6$$

c - Montrer que :  $\frac{b-b'}{a-b'} = i$  puis en déduire que

le triangle AB'B est isocèle et rectangle en B'.

$$\frac{b-b'}{a-b'} = \frac{3-3i-6}{3+3i-6} = \frac{-3-3i}{-3+3i}$$

$$\frac{b-b'}{a-b'} = \frac{-3(1+i)}{-3(1-i)} = \frac{1+i}{1-i}$$

$$\frac{b-b'}{a-b'} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2}$$

$$\text{D'où } \frac{b-b'}{a-b'} = i$$

$$\text{On a } \frac{b-b'}{a-b'} = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = \left[ 1; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{On a } \frac{b-b'}{a-b'} = \left[ 1; \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{donc } \left| \frac{b-b'}{a-b'} \right| = 1$$

$$\text{Donc } \frac{BB'}{AB'} = 1 \quad \text{et} \quad \arg \left( \frac{b-b'}{a-b'} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{Donc } AB' = BB' \quad \text{et} \quad (\vec{B'A}; \vec{B'B}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

D'où le triangle AB'B est isocèle et rectangle en B'.

d - En déduire que le quadrilatère OAB'B est un carré

Le point B' image du point B par la translation de vecteur  $\vec{OA}$  donc  $\vec{BB'} = \vec{OA}$ 

Donc le quadrilatère OAB'B est un parallélogramme

$$\text{On a } AB' = BB' \quad \text{et} \quad (\vec{B'A}; \vec{B'B}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{Donc}$$

D'où le quadrilatère OAB'B est un carré

**Exercice 3 : (3,5 pts)**On considère la suite  $(U_n)$  définie par :

$$U_{n+1} = \frac{6U_n}{15U_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

$$1) \text{ a - Montrer que: } U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{6U_n}{15U_n + 1} - \frac{1}{3} = \frac{18U_n - 15U_n - 1}{3(15U_n + 1)}$$

$$U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{3(U_n - \frac{1}{3})}{3(15U_n + 1)} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1}$$

$$\text{D'où } U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1}$$

b - Montrer que :  $U_n > \frac{1}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour  $n = 0$  on a  $U_0 = 1$  donc  $U_0 > \frac{1}{3}$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  supposons que  $U_n > \frac{1}{3}$  et montrons

que  $U_{n+1} > \frac{1}{3}$  c'est-à-dire  $U_{n+1} - \frac{1}{3} > 0$

On a  $U_n > \frac{1}{3}$  donc  $U_n - \frac{1}{3} > 0$  et

$$15U_n + 1 > 6 \quad \text{donc } U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1} > 0$$

$$\text{D'où } U_n > \frac{1}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) On considère la suite  $(V_n)$  définie par :

$$V_n = 1 - \frac{1}{3U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{6}$  puis écrire  $V_n$  en fonction de  $n$ .

Montrons que  $V_{n+1} = \frac{1}{6} V_n$  ?

$$V_{n+1} = 1 - \frac{1}{3U_{n+1}} = 1 - \frac{1}{\frac{18U_n}{15U_n + 1}}$$

$$V_{n+1} = 1 - \frac{15U_n + 1}{18U_n} = \frac{18U_n - 15U_n - 1}{18U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{3U_n - 1}{18U_n} = \frac{3U_n}{18U_n} - \frac{1}{18U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{18U_n} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3U_n}\right)$$

$$\text{D'où } V_{n+1} = \frac{1}{6} V_n$$

D'où  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{6}$

$(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{6}$  de premier

$$\text{terme } V_0 = 1 - \frac{1}{3U_0} = \frac{2}{3} \quad V_n = V_0 \left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{D'où } V_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3) Montrer que  $U_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$  et

en déduire  $\lim U_n$

$$\text{On a } V_n = 1 - \frac{1}{3U_n} \Leftrightarrow \frac{1}{3U_n} = 1 - V_n$$

$$\Leftrightarrow 3U_n = \frac{1}{1 - V_n} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{3 - 3\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

$$\text{D'où } U_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } U_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim U_n = \lim \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} = \frac{1}{3 - 2 \times 0} = \frac{1}{3}$$

$$\text{D'où } \lim U_n = \frac{1}{3}$$

**Problème :** (10 pts)

**Partie I :**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $I = ]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x - 1 + \ln x$

1) a - Montrer que  $g'(x) = \frac{x+1}{x} \quad \forall x \in I$

$$g(x) = x - 1 + \ln x$$

$$\text{Donc } g'(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{d'où } g'(x) = \frac{x+1}{x} \quad \forall x \in I$$

b - Montrer que  $g$  est croissante sur  $I$

$$\text{On a } g'(x) = \frac{x+1}{x} \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

Donc  $g'(x) > 0$

D'où  $g$  est croissante sur  $I$

2) En déduire que :  $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]0, 1]$

$$\text{Et que } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

On sait que  $g$  est croissante sur  $]0; +\infty[$

$$g(1) = 0$$

$$\forall x \in ]0, 1] \quad \text{donc } 0 < x \leq 1$$

$$\text{donc } x \leq 1 \quad \text{donc } g(x) \leq g(1)$$

Or  $g(1) = 0$

$$\text{D'où } g(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]0, 1]$$

$$\forall x \in [1, +\infty[ \quad \text{donc } x \geq 1 \quad \text{donc } g(x) \geq g(1)$$

$$\text{D'où } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

## Deuxième partie

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$$

$(C_f)$  est la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty$$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  la droite d'équation  $x = 0$

Est une asymptote verticale à la courbe  $(C)$ .

2) a – Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ ?}$$

(Remarquer que  $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x-1}{x}\right) \frac{\ln x}{x} \quad \forall x \in \mathbb{I}$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{\ln x}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

c – En déduire que la courbe  $(C_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction à déterminer.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

D'où la courbe  $(C)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

2) a – Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{I}$

$$f'(x) = \left(\left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x\right)'$$

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' \ln x + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1+\ln x}{x^2}$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

b – En déduire que  $g$  est croissante sur  $[1; +\infty[$  et décroissante sur  $]0; 1]$ .

$$\text{b) On sait que } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

donc le signe  $f'(x)$  est celui de  $g(x)$

$$\text{On a } g(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]0; 1]$$

donc  $\forall x \in ]0; 1]$

D'où  $f$  est décroissante sur  $]0; 1]$

$$\text{On a } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[$$

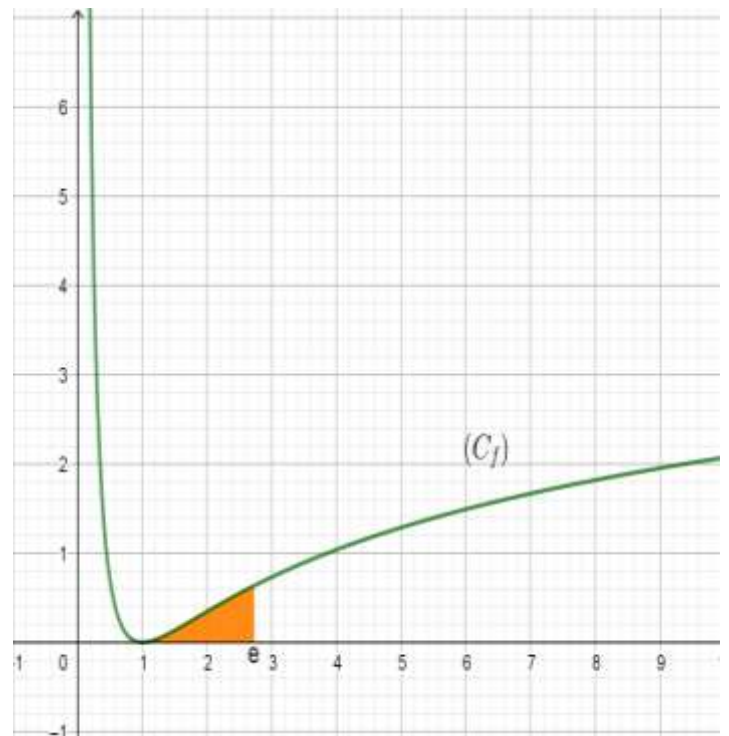
donc  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[$

D'où  $f$  est croissante sur  $[1; +\infty[$

c – Dresser le tableau des variations de  $f$ .

X	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$

3) Construire la courbe  $(C_f)$  (on admettra que  $(C_f)$  possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 1,5 et 2).



4) a – Montrer que  $H: x \rightarrow \frac{1}{2}(\ln x)^2$  est une primitive de  $h: x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$  sur  $]0; +\infty[$

$$H'(x) = \frac{1}{2} \left[ (\ln x)^2 \right]' = \frac{1}{2} \times 2 \times (\ln x) \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

$$H'(x) = h(x) \quad \forall x \in I$$

D'où  $H: x \rightarrow \frac{1}{2}(\ln x)^2$  est une primitive de

$$h: x \rightarrow \frac{\ln x}{x} \text{ sur } ]0; +\infty[$$

b – Montrer que :  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[ \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} \left[ (\ln e)^2 - (\ln 1)^2 \right]$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$$

c – A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_1^e \ln x dx = 1$$

$$\int_1^e \ln x dx = 1 ?$$

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 1 \quad g(x) = x$$

$$\int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx$$

$$= e(\ln e) - 1 \ln 1 - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

$$\int_1^e \ln x dx = 1$$

5) a – Vérifier que :  $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} \quad \forall x \in I$

$$f(x) = \left( \frac{x-1}{x} \right) \ln x = \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \ln x = \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

D'où  $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} \quad \forall x \in I$

b – Montrer que l'aire du domaine limité par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$  est  $0,5 \text{ cm}^2$ .

On sait que la courbe  $(C)$  est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle  $[1; e]$

$$A = \int_1^e \ln x - \frac{\ln x}{x} dx \text{ cm} \times \text{cm}$$

$$= \int_1^e \ln x dx \text{ cm}^2 - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \text{ cm}^2$$

$$= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \text{cm}^2 = \frac{1}{2} \text{cm}^2$$