



الصفحة
1
4



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2010
الموضوع

9	المعامل:	NS25	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		الشعب(ة) أو المسلك:

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques .
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes .
- Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique .
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.

Les calculatrices programmables sont strictement interdites

Exercice 1 : (3,5 points) **Les partis I et II sont indépendantes.**

I - On munit l'ensemble $I =]0, +\infty[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall (a, b) \in I \times I) \quad a * b = e^{\ln(a) \cdot \ln(b)}$$

- 0,5 1) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans I .
- 0,25 2) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε que l'on déterminera.
- 0,75 3) a-Montrer que $(I \setminus \{1\}, *)$ est un groupe commutatif.
 ($I \setminus \{1\}$ désigne l'ensemble I privé de 1).
- 0,25 b-Montrer que $]1, +\infty[$ est un sous-groupe de $(I \setminus \{1\}, *)$.
- 0,25 4) On munit I de la loi de composition interne \times (\times est la multiplication dans \square)
- 0,25 a-Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi \times
- 0,5 b-Montrer que $(I, \times, *)$ est un corps commutatif.

II - On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

- 0,5 1) Calculer A^2 et A^3
- 0,5 2) En déduire que la matrice A est non inversible.

Exercice 2 : (3,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- 0,25 1) a-Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $3 + 4i$
- 0,5 b-Résoudre dans l'ensemble \square l'équation : $(E) : 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$
- 2) Soient a et b les solutions de l'équation (E) avec $\text{Re}(a) < 0$ et soient A et B leurs points images respectifs dans le plan complexe.
- 0,25 a-Vérifier que : $\frac{b}{a} = 1 - i$
- 0,75 b- En déduire que le triangle AOB est rectangle et isocèle en A .
- 3) Soient C un point du plan différent du point A ayant pour affixe c et D l'image du point B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$; et soit L l'image du point D par la translation de vecteur \vec{AO} .
- 0,5 a-Déterminer en fonction de c le nombre complexe d affixe du point D
- 0,5 b-Déterminer en fonction de c le nombre complexe ℓ affixe du point L
- 0,75 c-Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{\ell - c}{a - c}$; en déduire la nature du triangle ACL .

Exercice 3 : (3 points)

- 1) Déterminer tous les nombres entiers naturels m tels que : $m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ [5]
- 2) Soit p un nombre premier tel que $p = 3 + 4k$ où k est un nombre entier naturel .
Soit n un nombre entier naturel tel que : $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$
- 0,25 a- Vérifier que : $(n^2)^{1+2k} \equiv -1 \pmod{p}$
- 0,5 b- Montrer que n et p sont premiers entre eux.
- 0,75 c- En déduire que : $(n^2)^{1+2k} \equiv 1 \pmod{p}$
- 0,5 d- Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n vérifiant : $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

Exercice 4 : (6.25 points)

I- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 4xe^{-x^2}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 0,5 1) Calculer la limite de f en $+\infty$
- 0,75 2) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ puis donner son tableau de variations.
- 0,75 3) Déterminer l'équation de la demi-tangente à la courbe (C) à l'origine du repère puis construire la courbe (C) . (on prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ et on admet que le point d'abscisse $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est un point d'inflexion de la courbe (C))
- 0,5 4) Calculer l'intégrale $a = \int_0^1 f(x) dx$ puis en déduire, en centimètre carré, l'aire de la partie plane limitée par la courbe (C) , les deux axes du repère et la droite d'équation $x = 1$

II) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$

- 0,25 1) a- Montrer que : $(\forall x > 1) \quad e^{-x^2} < e^{-x}$
- 0,25 b- En déduire la limite de f_n quand x tend vers $+\infty$
- 0,75 2) Etudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0; +\infty[$ puis donner son tableau de variations.
- 0,5 3) Montrer qu'il existe un nombre réel unique u_n de l'intervalle $]0, 1[$ tel que : $f_n(u_n) = 1$
- 0,25 4) a- Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad f_{n+1}(u_n) = u_n$

0,75 b-montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

4) On pose : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

0,25 a-Montrer que : $0 < \ell \leq 1$

0,25 b-Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad -\frac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$

0,5 c-En déduire que : $\ell = 1$

Exercice 5 : (3.75 points)

On considère la fonction numérique F définie sur \mathbb{R}^* par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

0,25 1) Montrer que F est impaire.

2) Pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$ on pose : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

0,25 a-Vérifier que : $(\forall x > 0) \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$

0,5 b-Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.

0,5 c-En déduire le sens de variations de la fonction F sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

0,5 3) a-En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x > 0) \quad (\exists c \in]x, 2x[) : F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$$

0,25 b- En déduire que : $(\forall x > 0) \quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$

0,75 c-Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

0,75 d-Montrer que : $F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1}$ et $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}$

0,75 en déduire que l'équation $F(x) = x$ admet une solution unique dans $]0, +\infty[$.