



الصفحة

1

1

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة الاستدراكية 2012  
الموضوع

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية  
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

9	المعامل	RS25	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures
  - L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
  - Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat
- 
- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques
  - Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes
  - Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique
  - Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse
  - Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse

**L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE**

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

**Premier exercice : (3.5 points) Les deux parties I et II sont indépendantes**

I- Pour tout a et b de l'intervalle  $I = [1, +\infty[$  on pose:  $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$

0.5 1) Montrer que  $\perp$  est une loi de composition interne dans  $I$

0.5 2) Montrer que la loi  $\perp$  est commutative et associative.

0.25 3) Montrer que  $(I, \perp)$  admet un élément neutre.

II- On rappelle que  $(M_2(\square), +, \times)$  est un anneau unitaire.

On considère l'ensemble  $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \square^* \right\}$

0.5 1) Montrer que  $E$  est une partie stable de  $(M_2(\square), \times)$

2) On considère l'application  $\varphi: \square^* \rightarrow E$   
 $x \mapsto M(x)$

0.5 a - Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $(\square^*, \times)$  vers  $(E, \times)$ .

0.5 b - En déduire la structure de  $(E, \times)$ .

0.75 c- Montrer que l'ensemble  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \square \right\}$  est un sous groupe de  $(E, \times)$

**Deuxième exercice :( 3.5points) les parties I et II sont indépendantes**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

I- On considère dans l'ensemble  $\square$  l'équation : (E)  $z^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$

0.5 1) a- Vérifier que  $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$  est une solution de l'équation (E)

0.25 b- Montrer que la deuxième solution de l'équation (E) est  $z_2 = 3z_1$

2) Soit  $\theta$  un argument du nombre complexe  $z_1$

0.5 Ecrire en fonction de  $\theta$  la forme trigonométrique du nombre complexe  $\frac{5}{3} + 4i$

II- On considère trois points distincts deux à deux A , B et  $\Omega$  , d'affixes respectifs les

nombres complexes  $a$ ,  $b$  et  $\omega$

Soit  $r$  la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . On pose  $P = r(A)$  et  $B = r(Q)$

et soient  $p$  et  $q$  les affixes respectifs des points  $P$  et  $Q$

0.5

1) a- Montrer que :  $p = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega)$  et  $q = \omega + e^{-\frac{i\pi}{3}}(b - \omega)$

0.25

b-Montrer que :  $\frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} = e^{\frac{i4\pi}{3}}$

0.5

c- Montrer que :  $\frac{p - a}{q - b} = \frac{\omega - a}{\omega - b} e^{\frac{i4\pi}{3}}$

2) On suppose que  $\frac{\omega - a}{\omega - b} = e^{\frac{i2\pi}{3}}$

0.25

a-Montrer que  $APQB$  est un parallélogramme.

0.75

b- Montrer que  $\arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ , en déduire que  $APQB$  est un rectangle.

### Troisième exercice : (3 points)

0.25

1) a-Vérifier que le nombre 503 est premier.

0.75

b-Montrer que  $7^{502} \equiv 1 [503]$ ; en déduire que  $7^{2008} \equiv 1 [503]$

2) On considère dans  $\square^2$  l'équation (E) :  $49x - 6y = 1$

0.5

Sachant que (1,8) est une solution particulière de l'équation (E); résoudre dans  $\square^2$  l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

3) On pose  $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$

0.25

a-Montrer que le couple  $(7^{2006}, N)$  est solution de l'équation (E)

1

b- Montrer que  $N \equiv 0 [4]$  et  $N \equiv 0 [503]$

0.25

c- En déduire que le nombre  $N$  est divisible par 2012

### Quatrième exercice :(7.5points)

I - Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

0.5

1) Etudier les variations de  $g$  sur  $[0, +\infty[$

- 0.5 2) En déduire le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$
- 11 - Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$
- 1 1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- 0.5 2) Montrer que pour tout réel  $x$  on a :  $f'(x) = e^x g(e^{-x})$
- 0.5 3) Dresser le tableau de variations de  $f$
- 1 4) Construire la courbe  $(C)$  représentative de la fonction  $f$  et la courbe  $(C')$  représentative de la fonction  $(-f)$  dans le même repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (on admet que  $-0,7$  est une valeur approchée de l'abscisse du seul point d'inflexion de la courbe  $(C)$ )
- 0.75 5) Montrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[-1, 0]$  on a :  $0 < f'(x) \leq g(e)$
- 0.75 6) Montrer que l'équation  $f(x) + x = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $-1 < \alpha < 0$
- 0.5 7) On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = -f(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
- 0.5 a-Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq u_n \leq 0$
- 0.75 b- Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e) |u_n - \alpha|$
- 0.5 c-En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$
- 0.25 d- Sachant que  $g(e) < 0,6$  ; calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Cinquième exercice : ( 2.5 points)

On considère la fonction  $F$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$

- 0.25 1) Calculer  $F(1)$
- 0.75 2)a-Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et calculer  $F'(x)$
- 0.5 b- En déduire que pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0, +\infty[$  on a :  $F(x) = 0$
- 0.5 3) En utilisant une intégration par parties , montrer que :
- $(\forall x > 0) ; F(x) = \left( \text{Arc tan } x + \text{Arc tan } \frac{1}{x} \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt$
- 0.25 4) Montrer que :  $(\forall x > 0) ; \text{Arc tan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan } x$
- 0.25 5) Déduire que :  $(\forall x > 0) ; \ln x = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt$