

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

## الدورة العادية 2013

### الموضوع



NS25

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه



المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الاجتياز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة، أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte trois exercices et un problème indépendants deux à deux.
- Les exercices et le problème peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes.
- Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique.
- Le problème se rapporte à l'analyse.

**L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE**

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

**Exercice1 : (3,5pts)**

On rappelle que  $(\mathbb{Z}, +, \times)$  est un anneau commutatif, unitaire et intègre.

1- On munit  $\mathbb{Z}$  de la loi de composition interne  $*$  définie par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2) ; x * y = x + y - 2$$

- 0.5 a) Montrer que la loi  $*$  est commutative et associative.  
0.25 b) Montrer que  $(\mathbb{Z}, *)$  admet un élément neutre que l'on déterminera.  
0.5 c) En déduire que  $(\mathbb{Z}, *)$  est un groupe commutatif.

2- On munit  $\mathbb{Z}$  de la loi de composition interne  $T$  définie par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2) ; xTy = xy - 2x - 2y + 6$$

et on considère l'application  $f$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  définie par :  $(\forall x \in \mathbb{Z}) ; f(x) = x + 2$

- 0.5 a) Montrer que l'application  $f$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{Z}, \times)$  dans  $(\mathbb{Z}, T)$   
0.25 b) Montrer que :  $(\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3) ; (x * y)Tz = (xTz) * (yTz)$

0.75 3- En déduire de tout ce qui précède que  $(\mathbb{Z}, *, T)$  est un anneau commutatif et unitaire.

0.25 4-a) Montrer que :  $xTy = 2$  si et seulement si  $(x = 2$  ou  $y = 2)$

0.25 b) En déduire que l'anneau  $(\mathbb{Z}, *, T)$  est intègre.

0.25 c)  $(\mathbb{Z}, *, T)$  est-il un corps ? (justifier votre réponse)

**Exercice2 : (3,5pts)**

**I-** Soit  $a$  un nombre complexe non nul.

Soit dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$  :  $(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$

0.25 1- Vérifier que le discriminant de l'équation  $(E)$  est :  $(-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$

0.5 2- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$

**II-** Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $M$  d'affixes respectifs  $a$ ,  $b = ae^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $z$

Soit  $r$  la rotation de centre  $M$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$

On pose  $A_1 = r^{-1}(A)$  et  $B_1 = r(B)$  ( $r^{-1}$  désigne la rotation réciproque de  $r$ )

et soient  $a_1$  et  $b_1$  les affixes respectifs de  $A_1$  et  $B_1$

0.5 1- Vérifier que le triangle  $OAB$  est équilatéral.

0.5 2- a) Montrer que :  $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$  et  $b_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

0.5 b) Montrer que le quadrilatère  $OA_1MB_1$  est un parallélogramme.

3- On suppose que :  $M \neq A$  et  $M \neq B$

0.5 a) Montrer que :  $\frac{z - b_1}{z - a_1} = -\frac{z - b}{z - a} \times \frac{a}{b}$

0.75 b) Montrer que  $M$ ,  $A_1$  et  $B_1$  sont alignés si et seulement si  $M$ ,  $O$ ,  $A$  et  $B$  sont cocycliques.

### **Exercice3 :(3pts)**

L'objectif de l'exercice est de chercher les entiers naturels  $n$  strictement supérieurs à 1 et qui vérifient la propriété suivante :  $(R) : 3^n - 2^n \equiv 0 \pmod{n}$

1-On suppose que  $n$  vérifie la propriété  $(R)$  et soit  $p$  **le plus petit diviseur premier positif** de  $n$ .

0.75 a) Montrer que :  $3^n - 2^n \equiv 0 \pmod{p}$ , en déduire que  $p \geq 5$

0.5 b) Montrer que :  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  et  $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

0.5 c) Montrer qu'il existe un couple  $(a, b)$  de  $\mathbb{Z}^2$  tel que :  $an - b(p-1) = 1$

0.5 d) Soient  $r$  et  $q$  le reste et le quotient de la division euclidienne de  $a$  par  $p-1$

$$(a = q(p-1) + r \text{ avec } 0 \leq r < p-1 \text{ et } q \in \mathbb{Z})$$

Montrer qu'il existe **un entier naturel**  $k$  tel que :  $rn = 1 + k(p-1)$

0.75 2- En déduire de tout ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel  $n$  strictement supérieur à 1 vérifiant  $(R)$

### **Problème :(10pts)**

On considère la fonction numérique  $h$  définie sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  par :

$$h(1) = 1 \text{ et } (\forall x > 1); h(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$$

#### **Première partie :**

0.25 1-a) Montrer que la fonction  $h$  est continue à droite en 1

0.75 b) Montrer que :  $(\forall x > 1); \ln x < x-1$ , en déduire que la fonction  $h$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]1, +\infty[$

0.5 2-a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  puis donner le tableau de variations de  $h$

0.25 b) En déduire que :  $(\forall x \geq 1); 0 < h(x) \leq 1$

#### **Deuxième partie :**

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  par :

$$g(1) = \ln 2 \text{ et } (\forall x > 1); g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt$$

Soit  $(C)$  la courbe représentative de la fonction  $g$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0.25 1-a) Vérifier que :  $(\forall x > 1); \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$

0.25 b) Vérifier que :  $(\forall x > 1); g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t \ln t} dt$

0.5 c) Montrer que :  $(\forall x > 1); g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{t-1}{t \ln t} dt$

0.5 2-a) Montrer que :  $(\forall x > 1) ; (x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$

0.5 b) En déduire que la fonction  $g$  est dérivable à droite au point 1

0.75 c) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

0.75 3-a) Montrer que  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $]1, +\infty[$  et que :  $(\forall x > 1) ; g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$

0.5 b) En déduire que :  $(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ , puis donner le tableau de variations de  $g$

0.5 c) Construire la courbe  $(C)$

### **Troisième partie :**

0.5 I-1- Montrer que la fonction  $k : x \mapsto g(x) - x + 1$  est une bijection de l'intervalle  $[1, +\infty[$  dans l'intervalle  $] -\infty, \ln 2]$

0.25 2- En déduire qu'il existe un unique réel  $\alpha$  de l'intervalle  $]1, +\infty[$  qui vérifie :  $1 + g(\alpha) = \alpha$

II- On considère la suite numérique  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$1 \leq u_0 < \alpha \text{ et } (\forall n \geq 0) ; u_{n+1} = 1 + g(u_n)$$

0.5 1- a) Montrer que :  $(\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$

0.5 b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est strictement croissante.

0.75 c) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

0.5 2-a) Montrer que :  $(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0.5 b) Montrer que :  $(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

0.25 c) En déduire une deuxième fois, que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

**FIN**