

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

## الدورة العادية 2014

### الموضوع

NS 25

ⵜⴰⵎⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵔ  
ⵜⴰⵎⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵙⵓⵎⵏⵓⵔ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵔ  
ⵏ ⵙⵓⵎⵏⵓⵔ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵔ



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte à l'arithmétique.....(3 pts)
- Le deuxième exercice se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.....( 3.5 pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.....(8 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.....( 2pts)

**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé**

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

**Exercice 1 :** (3 pts)

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose :  $a_n = \underbrace{333\dots31}_{n \text{ fois}}$  ( $n$  fois le chiffre 3)

0.5 1-Vérifier que les deux nombres  $a_1$  et  $a_2$  sont premiers.

0.5 2- Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

0.75 3 -Montrer que pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  :  $10^{30k+2} \equiv 7 \pmod{31}$

0.75 4 -Montrer que pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  :  $3a_{30k+1} \not\equiv 0 \pmod{31}$ , puis en déduire que : 31 divise  $a_{30k+1}$

0.5 5- Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , si  $n \neq 1$  [30] alors l'équation  $a_n x + 31y = 1$  n'admet pas de solutions dans  $\mathbb{Z}^2$

**Exercice 2 :** (3.5pts)

On rappelle que  $(\mathbb{C}, +, \times)$  est un corps commutatif et que  $(M_2(\mathbb{C}), +, \times)$  est un anneau

unitaire de zéro  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et d'unité  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Pour tout  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{C}$ , on pose :  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$  et on considère l'ensemble

$$E = \left\{ M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

0.5 1-Montrer que  $E$  est un sous-groupe du groupe  $(M_2(\mathbb{C}), +)$

0.75 2- Calculer  $J^2 = J' J$  sachant que  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , puis en déduire que  $E$  n'est pas stable dans  $(M_2(\mathbb{C}), \times)$

3-On définit sur  $M_2(\mathbb{C})$  la loi de composition interne\* par :

$$A * B = A \times N \times B \quad \text{avec } N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère l'application  $\varphi$  de  $\mathbb{C}^*$  vers  $M_2(\mathbb{C})$  qui associe à chaque nombre complexe non nul  $a + ib$  ( $a$  et  $b$  étant deux nombres réels) la matrice  $M(a, b)$ .

0.5 a) Montrer que  $\varphi$  est un homomorphisme de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  vers  $(M_2(\mathbb{C}), *)$

0.25 b) On pose :  $E^* = E - \{O\}$ . Montrer que :  $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

- 0.5 c) Montrer que  $(E^*, *)$  est un groupe commutatif.
- 0.5 4- Montrer que :  $(\forall (A, B, C) \in E^3) \quad A * (B + C) = A * B + A * C$
- 0.5 5- En déduire de ce qui précède que  $(E, +, *)$  est un corps commutatif.

**Exercice 3** : (3.5pts)

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, u, v)$

Soit  $q$  un nombre réel tel que :  $q = \frac{p}{2}$

1- On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante : (E)  $z^2 - \sqrt{2}e^{iq}z + e^{2iq} = 0$

- 0.25 a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est :  $D = (\sqrt{2}ie^{iq})^2$
- 0.75 b) Ecrire sous forme trigonométrique les deux racines  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation (E) dans  $\mathbb{C}$

2- On considère les points  $I, J, T_1, T_2$  et  $A$  d'affixes respectives

$$1, -1, e^{iq + \frac{p}{4}}, e^{iq - \frac{p}{4}} \text{ et } \sqrt{2}e^{iq}$$

- 0.5 a) Montrer que les deux droites  $(OA)$  et  $(T_1T_2)$  sont perpendiculaires.
- 0.25 b) Soit  $K$  le milieu du segment  $[T_1T_2]$ . Montrer que les points  $O, K$  et  $A$  sont alignés.
- 0.25 c) En déduire que la droite  $(OA)$  est la médiatrice du segment  $[T_1T_2]$ .
- 3- Soit  $r$  la rotation de centre  $T_1$  et d'angle  $\frac{p}{2}$
- 0.25 a) Donner l'expression complexe de la rotation  $r$
- 0.5 b) Vérifier que l'affixe du point  $B$  image du point  $I$  par la rotation  $r$  est :  $b = \sqrt{2}e^{iq} + i$
- 0.25 c) Montrer que les deux droites  $(AB)$  et  $(IJ)$  sont perpendiculaires.

0.25 4- Déterminer l'affixe du point  $C$  image du point  $A$  par la translation de vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ -v \end{pmatrix}$

0.25 5- Montrer que  $A$  est le milieu du segment  $[BC]$

**Exercice 4** : (8 pts)

$I$  - On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2}; \quad x > 0$$

$$f(0) = 0$$

- 0.5 1-a) Montrer que  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
- 0.25 b) Etudier le signe de  $f(x)$  sur  $[0, +\infty[$ .
- 0.25 2-a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

0.25 b) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$

0.5 c) Montrer que :  $(\exists \alpha \in ]0, 1[) f'(\alpha) = 0$

0.5 d) En déduire que :  $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$

II - On considère la fonction  $F$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

0.5 1-a) Vérifier que :  $(\forall t \in [1, +\infty[) \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$

b) Montrer que :  $(\forall x \in [1, +\infty[) F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$

1

( On remarquera que :  $F(x) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt$  )

1

c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$  puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

0.5 2-a) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  puis calculer  $F'(x)$

0.25 b) Etudier les variations de  $F$  sur  $[0, +\infty[$

0.5 III - 1-a) Montrer que :  $(\forall t \in ]0, +\infty[) -t \ln t \leq \frac{1}{e}$

0.25 b) En déduire que :  $(\forall t \in [0, +\infty[) f(t) \leq \frac{1}{e}$

0.25 c) Montrer que :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) F(x) < x$

2- On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $u_0 \in ]0, 1[$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = F(u_n)$

0.5 a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \in ]0, 1[$

0.5 b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0.5 c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Exercice 5 :** (2 pts)

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} ; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

0.5 1- Montrer que  $g$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

2-Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0, +\infty[$  on pose :  $L(x) = \int_x^1 g(t) dt$

- 0.25 a) Montrer que  $L$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
- 0.25 b) Calculer  $L(x)$  pour  $x > 0$
- 0.5 c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$  et en déduire la valeur de  $L(0)$

3-Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $s_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

- 0.5 Montrer que la suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  est convergente puis déterminer sa limite.

**FIN**