الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- الموضوع -
NS 25

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵥⵔⴼⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux nombres complexes………(3pts)
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique……….....….(3 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux structures algébriques…..(4 pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse…………………....(6.5 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse……………...…..(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE 1: (3points)

1-On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante:

$$(E): \ z^2-\left(5+i\sqrt{3}\right)z+4+4i\sqrt{3}=0$$

0.25 a) Vérifier que $\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$ est le discriminant de l'équation (E).

0.5 b) Déterminer a et b les deux solutions de l'équation (E) (sachant que : $b\in\mathbb{R}$)

0.25 c) Vérifier que: $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)a$

2- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

Soit A le point d'affixe a et B le point d'affixe b.

0.5 a) Déterminer b_1 l'affixe du point B_1 image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0.5 b) Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$

0.5 c) Vérifier que : $arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}\,[2\pi]$

0.5 d) Soit C un point, d'affixe c, appartenant au cercle circonscrit au triangle OAB et différent de O et de A. Déterminer un argument du nombre complexe $\dfrac{c}{c-a}$

EXERCICE 2: (3points)

Soit x un nombre entier relatif tel que: $x^{1439}\equiv 1436\ [2015]$

0.25 1-Sachant que: $1436\times 1051-2015\times 749=1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2- Soit d un diviseur commun de x et de 2015

0.5 a) Montrer que d divise 1436

0.5 b) En déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

0.75 3-a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que:

$x^{1440}\equiv 1\ [5]$ et $x^{1440}\equiv 1\ [13]$ et $x^{1440}\equiv 1\ [31]$ (remarquer que: $2015=5.13.31$)

0.5 b) Montrer que : $x^{1440}\equiv 1\ [65]$ et en déduire que: $x^{1440}\equiv 1\ [2015]$

0.5 4-Montrer que: $x\equiv 1051\ [2015]$

EXERCICE 3: (4 points)

On rappelle que $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire dont l'unité est $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+)$ est un groupe commutatif. Pour tout nombre réel x, on pose $M(x)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -2x & 1+2x\end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E=\{M(x)\,/\,x\in\mathbb{R}\}$

On munit E de la loi de composition interne T définie par:

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad M(x)\,\mathrm{T}\,M(y)=M(x+y+1)$$

1- Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans E définie par : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad \varphi(x) = M(x-1)$

0.5 a)Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T)

0.5 b) Montrer que (E,T) est un groupe commutatif.

0.5 2- a) Montrer que: $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\quad M(x)\times M(y) = M(x+y+xy)$

0.5 b) En déduire que E est une partie stable de $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ et que la loi « $\times$ » est commutative dans E.

0.5 c) Montrer que la loi « $\times$ » est distributive par rapport à la loi « T » dans E.

0.5 d) Vérifier que: $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E,T) et que I est l'élément neutre dans $(E,\times)$.

0.25 3- a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\})\quad M(x)\times M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right) = I$.

0.75 b) Montrer que $(E,\mathrm{T},\times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 4: (6.5points)

Première partie: Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par:

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad f(x) = x\left(1+ln^2 x\right) \quad \text{pour } x>0$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5 1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2-a)Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 c) Calculer $f'(x)$ pour $x>0$, en déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

0.25 3-a) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1}.

0.25 b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite d'équation: $y=x$

0.5 c) Tracer la courbe (C) . (On prendra $e^{-1}=0.4$)

Deuxième partie: On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par:

$$u_0 = e^{-1} \qquad \text{et} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})\quad u_{n+1} = f(u_n)$$

0.5 1-Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})\quad e^{-1} \leq u_n < 1$

0.5 2- Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

3- On pose: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

0.25 a) Montrer que: $e^{-1} \leq I \leq 1$

0.5 b) Déterminer la valeur de I

Troisième partie: Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par:

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

0.25 1-a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto x\ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$

0.5 b) Montrer que: $(\forall x > 0)$ $\int_1^x t\ln^2(t)\,dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln(t)\,dt$

0.5 c) En déduire que: $(\forall x > 0)$ $F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{2}\ln^2(x)$

0.25 2-a) Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$

0.5 b) Calculer $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$

EXERCICE5:(3.5points)

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par:

$$g(0) = \ln 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \quad \text{pour} \quad x > 0$$

0.5 1-a) Montrer que: $(\forall x > 0)$ $(\forall t \in [x,2x])$ $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$

0.5 b) Montrer que: $(\forall x > 0)$ $e^{-2x}\ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x}\ln 2$

0.25 c) En déduire que la fonction g est continue à droite en 0.

0.75 2- Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$

0.5 3-a) Montrer que: $(\forall t > 0)$ $-1 \leq \frac{e^{-t}-1}{t} \leq -e^{-t}$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

0.5 b) Montrer que: $(\forall x > 0)$ $-1 \leq \frac{g(x)-\ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$

0.5 c) En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0 .

FIN