الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2015
- الموضوع -

RS 25

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques…….(4 pts)
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique et au calcul des probabilités……..……..(3 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes…….(3pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse…….....(6 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse……..……(4 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1:(4 points)

Première partie: On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2) \quad x*y = x + y - e^{xy} + 1$$

0.25 1-a) Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$

0.5 b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0.5 2- Sachant que l'équation : $3 + x - e^{2x} = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions distinctes a et b .

Montrer que la loi $*$ n'est pas associative dans $\mathbb{R}$

Deuxième partie :On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

Pour tout x et y réels, on pose : $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$ et soit $F = \{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0.5 1- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

0.5 2- Montrer que F est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

3- On considère l'application j de $\mathbb{C}^*$ dans F qui associe à tout nombre complexe $x+iy$ (où x et y sont deux réels) la matrice $M(x,y)$.

0.5 a) Montrer que j est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(F,\times)$

0.25 b) On pose : $F^* = F - \{M(0,0)\}$. Montrer que $j(\mathbb{C}^*) = F^*$

0.25 c) Montrer que $(F^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0.75 4- Montrer que $(F,+,\times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE2: (3 points)

0.5 I-1- a étant un entier, montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors $a^{2016} \equiv 1 \ [13]$

2- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E): $x^{2015} \equiv 2 \ [13]$ et soit x une solution de l'équation (E).

0.5 a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0.5 b) Montrer que : $x \equiv 7 \ [13]$

0.5 3- Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{7+13k / k\in\mathbb{Z}\}$

II-Une urne contient 50 boules portant les numéros de 1 à 50(les boules sont indiscernables au toucher)

0.5 1- On tire au hasard une boule de l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?

0.5 2- On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro, puis on la remet dans l'urne. On répète l'expérience précédente 3 fois .Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?

EXERCICE3:(3 points)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante: $(E): z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$

0.25 1-a)Vérifier que $(1-3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E)

0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ (on prendra z_1 imaginaire pur)

0.5 c) Montrer que: $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3p}{4}}$

2- Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère le point A d'affixe z_1 et le point B d'affixe z_2

0.25 a)Déterminer le nombre complexe e affixe du point E milieu du segment $[AB]$

0.5 b) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{-p}{2}$ et soit c l'affixe du point C image du point E par la rotation r. Montrer que : $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

1 c) On considère D le point d'affixe $d = 1 + \frac{3}{2}i$. Montrer que le nombre $\frac{z_2 - d}{c - d} \times \frac{c - z_1}{z_2 - z_1}$ est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

EXERCICE4 :(6 points)

Soit n un entier naturel non nul .

On considère la fonction f_n à variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par: $f_n(x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.75 1-a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0.75 b)Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f_n'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.25 c)Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

0.5 2-a)Montrer que le point $I_n\left(n,\frac{1}{2}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_n)

0.5 b) Construire la courbe (C_1) .

0.75 c) Calculer l'aire de la surface plane limitée par la courbe et les droites d'équations: $x = 0, x = 1$ et $y = 0$

0.75 3-a)Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une solution unique u_n dans

l'intervalle $]0,n[$.

0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R})\quad f_{n+1}(x) < f_n(x)$

0.75 c) Monter que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0.5 d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE5:(4 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt$

0.5 1-Montrer que la fonction g est paire.

0.75 2-Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$

0.5 3-a) En utilisant une intégration par parties, vérifier que:

$$\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt = \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$$

0.75 b) Montrer que: $(\forall x > 0)\quad |g(x)| \leq \frac{2}{x}$, puis en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

0.5 4-a) Montrer que: $(\forall x > 0)\quad 0 \leq \int_x^{3x} \frac{1-\cos t}{t}\,dt \leq 2x$

(Remarquer que : $(\forall t > 0)\ 1 - \cos t \leq t$)

0.5 b) Vérifier que: $(\forall x > 0)\quad g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t}\,dt$

0.5 c) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$

FIN