

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2016

- الموضوع -

NS 25

ⵜⴰⵎⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵔ
ⵜⴰⵎⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵔⵉⵔⵉⵏⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵔ
ⵏ ⵔⵉⵔⵉⵏⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵔ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم
والامتحانات والتوجيه



4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques ... (3.5 pts)
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique.....(3 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes(3.5 pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.....(7 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.....(3 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE 1: (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un anneau unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

Pour tout (x, y) de \mathbb{C}^2 on pose : $M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$ et $E = \{M(x, y); (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$

0.5 1- Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_3(\mathbb{C}), +)$

2-Vérifier que :

0.5 $(M(x, y) \cdot M(x', y')) = M(xx' - yy', xy' + yx')$

3- On pose : $E^* = E - \{M(0, 0)\}$ et on considère l'application $j : \mathbb{C}^* \rightarrow E$ qui au nombre complexe $z = x + iy$ associe la matrice $M(x, y)$ de E , avec $(x, y) \in \mathbb{C}^2$

0.25 a) Montrer que j est un homomorphisme de (\mathbb{C}^*, \cdot) vers (E, \cdot)

0.75 b) En déduire que (E^*, \cdot) est un groupe commutatif d'élément neutre $M(1, 0)$.

0.5 4- Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

5- On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

0.5 a) Calculer $A \cdot M(x, y)$ pour $M(x, y) \in E$

0.5 b) En déduire qu'aucun élément de E n'admet de symétrique dans $(M_3(\mathbb{C}), \cdot)$

EXERCICE 2: (3points)

Première partie : Soit (a, b) dans $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ tel que le nombre premier 173 divise $a^3 + b^3$

0.25 1- Montrer que : $a^{171} \equiv -b^{171} \pmod{173}$ (remarquer que : $171 = 3 \times 57$)

0.25 2- Montrer que : 173 divise a si et seulement si 173 divise b

0.25 3- On suppose que 173 divise a . Montrer que 173 divise $a + b$

4- On suppose que 173 ne divise pas a .

0.5 a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $a^{172} \equiv b^{172} \pmod{173}$

0.5 b) Montrer que : $a^{171}(a + b) \equiv 0 \pmod{173}$

0.5 c) En déduire que 173 divise $a + b$

Deuxième partie : On considère dans $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ l'équation suivante :

$$(E) \quad x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$$

Soit (x, y) un élément de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ solution de (E) , on pose : $x + y = 173k$ avec $k \in \mathbb{R}^*$

0.25 1- Vérifier que : $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$

0.5 2- Montrer que $k = 1$ puis résoudre l'équation (E) .

EXERCICE 3: (3.5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère dans le plan complexe deux points M_1 et M_2 tels que les points O, M_1 et M_2 sont distincts deux à deux et non alignés.

Soient z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2 et soit M le point dont l'affixe z

vérifie la relation :
$$z = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$$

0.5 1- a) Montrer que :
$$\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$$

0.5 b) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2

0.5 2- Montrer que si $z_2 = \overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe des réels.

3- On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et de mesure d'angle α où α est un réel de l'intervalle $]0, \pi[$

0.5 a) Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α

0.5 b) Montrer que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$

4- Soit θ un réel **donné** de l'intervalle $]0, \pi[$.

On suppose que z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation : $6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$

0.5 a) Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que :
$$z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$$

0.5 b) Donner en fonction de q , la forme trigonométrique du nombre complexe z .

EXERCICE 4: (7points)

Première partie :

0.5 1- En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto e^{-t}$, montrer que pour tout réel strictement positif x , il existe un réel θ compris entre 0 et x tel que :
$$e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

2- En déduire que :

0.25 a) (" $x > 0$) ; $1 - x < e^{-x}$

0.25 b) (" $x > 0$) ; $x + 1 < e^x$

0.25 c) (" $x > 0$) ; $0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$

Deuxième partie :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 1$$

et soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

0.5 1- a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0 .

0.5 b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2-a) Montrer que : $(\forall x > 0) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq e^{-x} + 1$

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-a) de la première partie)

0.5 b) En déduire que : $(\forall x > 0) \quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$

0.5 3-a) Vérifier que : $(\forall x > 0) \quad \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} f(x)$

0.75 b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}$ puis interpréter le résultat obtenu.

0.75 4-a) Montrer que f est dérivable en tout point de $]0, +\infty[$ et que :

$$(\forall x > 0) \quad f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$$

0.5 b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-b) de la première partie)

Troisième partie :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(f(u_n))$ pour $n \in \mathbb{N}$

0.5 a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$

0.5 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-c) de la première partie)

0.5 c) Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation : $\ln(f(x)) = x$ puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$

EXERCICE 5 : (3 points)

On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$$

0.5 1-a) Etudier le signe de $F(x)$ pour tout x de I

0.5 b) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I et calculer $F'(x)$ pour tout x de I .

- 0.25 c) Montrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle I
- 2-a) En utilisant la technique de changement de variable en posant : $u = \sqrt{e^t - 1}$, montrer que pour
- 0.5 tout x de I on a :
$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$
- 0.5 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 0.25 3-a) Montrer que la fonction F est une bijection de l'intervalle I dans un intervalle J que l'on déterminera.
- 0.5 b) Déterminer F^{-1} la bijection réciproque de F .

FIN