

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2016

- الموضوع -

RS 25

ⵜⴰⵎⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵔ
ⵜⴰⵍⵓⵎⴰⵏⵜ ⵏ ⵓⵔⵓⵔ
ⵏ ⵓⵔⵓⵔ ⵏ ⵓⵔⵓⵔ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم
والامتحانات والتوجيه



4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte au calcul des probabilités(3 pts)
- Le deuxième exercice se rapporte aux structures algébriques.. (3.5 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.....(6.5 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.....(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE 1 : (3pts)

On a deux boites U et V . La boite U contient 4 boules rouges et 4 boules bleues.

La boite V contient deux boules rouges 4 boules bleues.

On considère l'épreuve suivante : On tire au hasard une boule de la boite U : Si elle est rouge, on la remet dans la boite V puis on tire au hasard une boule de la boite V ; si elle est bleue on la pose de coté puis on tire une boule de la boite V .

Soient les événements suivants : R_U « La boule tirée de la boite U est rouge »

B_U « La boule tirée de la boite U est bleue »

R_V « La boule tirée de la boite V est rouge »

B_V « La boule tirée de la boite V est bleue »

- 0.5 1- Calculer la probabilité de chacun des deux événements R_U et B_U .
- 0.5 2- a) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement R_U est réalisé.
- 0.5 b) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement B_U est réalisé.
- 1 3- Montrer que la probabilité de l'événement B_V est : $\frac{13}{21}$
- 0.5 4- En déduire la probabilité de l'événement R_V .

EXERCICE 2 : (3.5 pts)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un anneau unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

est un corps commutatif.

Pour chaque nombre complexe $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, on pose :

$M(z) = \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 5y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & x-2y \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E = \{M(z) / z \in \mathbb{C}\}$

1- On munit E de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$("z \in \mathbb{C}) ("z' \in \mathbb{C}) : M(z) * M(z') = M(z) + M(z') - M(0)$$

1 Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

2- On considère l'application $j : \mathbb{C}^* \rightarrow E$ qui associe au nombre complexe z de \mathbb{C}^* la matrice $M(z)$ de E

1 a) Montrer que j est un homomorphisme de (\mathbb{C}^*, \cdot) dans (E, \cdot)

0.5 b) En déduire que $(E - \{M(0)\}, \cdot)$ est un groupe commutatif.

1 3- Montrer que $(E, *, ')$ est un corps commutatif.

EXERCICE 3 : (3.5 pts)

On considère dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation : $(E): z^2 - (1 + \sqrt{3})(1 + i)z + 4i = 0$

0.5 1-a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $D = (\sqrt{3} - 1)(1 - i)^2$

1 b) Ecrire sous forme trigonométrique les deux solutions de (E)

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, u, v) .

On considère les deux points A et B d'affixes respectives $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3} + i$

0.75 a) Montrer que l'ensemble (D) des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $z = \frac{1}{2}a\bar{z}$ est une droite qui passe par le point B

b) Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z' tels que : $z' = a\bar{z} - b$ et $z' \perp b$

0.5 Montrer que :
$$\frac{b^2}{(z' - b)(z - b)} = \frac{2}{|z - b|^2}$$

0.75 c) En déduire que la droite (D) est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$

EXERCICE 4 : (6.5 pts)

n est un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \ln(x) - \frac{n}{x}$

et soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

0.75 1-a) Etudier les deux branches infinies de la courbe (C_n) .

0.75 b) Etudier les variations de la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ puis donner son tableau de variation.

0.5 c) Construire (C_2)

0.5 2- Montrer que la fonction f_n est une bijection de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R}

0.5 3-a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, il existe un unique nombre réel α_n de l'intervalle $]0, +\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$

0.5 b) Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

0.5 c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

0.5 4-a) Montrer que : $(\forall x > 0) ; \ln(x) < x$

- 0.5 b) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$
- 5- Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on pose : $I_n = \frac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x) dx$
- 0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists c_n \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}]) : I_n = f_n(c_n)$
- 0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq I_n \leq \frac{1}{\alpha_{n+1}}$
- 0.5 c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

EXERCICE 5 : (3.5 pts)

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique g_n à variable réelle x définie sur l'intervalle $[n, +\infty[$ par :

$$g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{\ln t} dt$$

- 0.5 1-a) Montrer que la fonction g_n est dérivable sur l'intervalle $[n, +\infty[$ puis déterminer sa fonction dérivée première g'_n
- 0.25 b) Montrer que la fonction g_n est strictement croissante sur l'intervalle $[n, +\infty[$
- 0.5 2-a) Montrer que : $(\forall x \geq n) ; g_n(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$
- (On pourra utiliser l'inégalité : $(\forall t \geq 0) ; \ln(1+t) \leq t$)
- 0.25 b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$
- 0.25 3-a) Montrer que g_n est une bijection de l'intervalle $[n, +\infty[$ dans l'intervalle $[0, +\infty[$.
- 0.5 b) En déduire que : $(\forall n \geq 2) (\exists! u_n \geq n) : \int_n^{u_n} \frac{1}{\ln t} dt = 1$
- 4- On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 2}$ définie dans la question 3-b).
- 0.5 a) Montrer que : $(\forall n \geq 2) ; \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t} dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t} dt$
- 0.5 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.
- 0.25 c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

FIN