

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية - خيار فرنسية
الدورة الاستدراكية 2017
- الموضوع -



المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب) – خيار فرنسية	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice1 se rapporte aux structures algébriques.....(4.5pts)
- L'exercice2 se rapporte au calcul des probabilités.....(3pts)
- L'exercice3 se rapporte aux nombres complexes(2.5pts)
- L'exercice4 se rapporte à l'analyse.....(10pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 : (4.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps commutatif, que $(M_2(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(M_2(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau unitaire, non commutatif et non intègre.

On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ et

$$E = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{K}^2\}$$

0.75 1-Montrer que E est un sous espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{K}), +, \cdot)$, de dimension 2

0.5 2-a) Montrer que E est stable dans $(M_2(\mathbb{K}), \times)$

0.75 b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau unitaire et commutatif.

3- On pose $E^* = E \setminus \{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de \mathbb{K}^* vers E^* définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2 \quad \varphi(x + iy) = M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

0.75 a) Montrer que φ est un isomorphisme de (\mathbb{K}^*, \times) sur (E^*, \times)

0.5 b) En déduire que (E^*, \times) est un groupe commutatif.

0.75 c) Montrer que : $J^{2017} = j \left(3^{1008} \sqrt{3} i\right)$, puis déterminer l'inverse de la matrice J^{2017} dans (E^*, \times)

0.5 4- Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3 pts)

Un sac contient $2n$ boules (n dans \mathbb{N}^*), dont n sont blanches et n sont noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Un jeu consiste à tirer une boule du sac à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boule et à noter aussi sa couleur.

La règle du jeu indique que :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on gagne 20 points .
- Si les deux boules tirées sont noires, on perd 20 points .
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gain est nul .

0.75 1- Calculer la probabilité de gagner 20 points , la probabilité de perdre 20 points et la probabilité de réaliser un gain nul.

2- On répète 5 fois le jeu précédent.

0.5 a) Calculer la probabilité de gagner 100 points.

1 b) Calculer la probabilité de gagner 40 points.

3- Au cours d'un seul jeu ,on considère la variable aléatoire X qui prend uniquement

les valeurs -20 si on perd , 0 si le gain est nul et +20 si on gagne.

- 0.5 a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X
0.25 b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Exercice 3: (2.5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Soient M le point d'affixe le nombre complexe non nul z

et M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

- 0.5 1- Déterminer le nombre complexe z pour que les deux points M et M' soient confondus.
2- On suppose que M est distinct des points A et B d'affixes respectifs 1 et -1

0.5 Montrer que : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$

0.75 3- Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$

Montrer que : si M appartient à (Δ) alors M' appartient à (Δ)

4- Soit (Γ) le cercle dont un diamètre est $[AB]$

0.75 Montrer que : si M appartient à (Γ) alors M' appartient à la droite (AB)

EXERCICE4 :(10 pts)

Partie1 :

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

0.5 1- Montrer que f est continue sur l'intervalle I

0.5 2-a) Soit x dans I . Montrer que : $\forall t \in [0, x] \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

0.5 b) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[\quad \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$

0.75 c) Montrer que f est dérivable à droite en 0

0.5 3- a) Sachant que f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

0.25 b) Etudier les variations de f sur l'intervalle I

Partie 2 :

Soit g la fonction numérique définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[\quad g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

0.5 1- a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) \leq g(x) \leq 1$

0.75 b) Montrer que g est dérivable à droite en 0

0.75 2- Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad g'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - g(x))$$

0.25 3- Montrer que g est décroissante sur l'intervalle I

0.75 4-a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$

(remarquer que : " $x \in]0, +\infty[\quad 0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}$)

0.5 b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

Partie 3 :

0.75 1- Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α dans $]0, 1[$

0.5 2- a) Vérifier que : " $x \in]0, +\infty[\quad 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1 + x^2}$

(on pourra utiliser la question 2-b) Partie 1)

0.75 b) Montrer que : " $x \in]0, +\infty[\quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3- Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}^+, \quad u_{n+1} = g(u_n) \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}$$

0.75 a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

0.75 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

FIN