

**Corrigé de l'exercice 1 :**

1-

- ✓  $E \neq \emptyset$  ( car  $O = M(0,0) \in E$  )
- ✓  $E \subset M_2(\mathbb{R})$
- ✓ Soient  $M(x,y)$  et  $M(a,b)$  deux éléments de  $E$  :

On a :

$$\begin{aligned} M(x,y) - M(a,b) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-a & -2(y-b) \\ y-b & (x-a)+2(y-b) \end{pmatrix} \\ &= M(x-a, y-b) \end{aligned}$$

$$((x-a, y-b) \in \mathbb{R}^2)$$

Donc :  $\forall (M(x,y), M(a,b)) \in E^2 : M(x,y) - M(a,b) \in E$

D'où  $E$  est un sous groupe de  $(M_2(\mathbb{R}), +)$

2- a) Montrons que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

- ✓ On a :  $E \neq \emptyset$  et  $E \subset M_2(\mathbb{R})$
- ✓ Soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  et  $(M(x,y), M(a,b)) \in E^2$

On a :

$$\begin{aligned} \alpha M(x,y) + \beta M(a,b) &= \alpha \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x & -2\alpha y \\ \alpha y & \alpha x + 2\alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a & -2\beta b \\ \beta b & \beta a + 2\beta b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x + \beta a & -2\alpha y - 2\beta b \\ \alpha y + \beta b & \alpha x + 2\alpha y + \beta a + 2\beta b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x + \beta a & -2(\alpha y + \beta b) \\ \alpha y + \beta b & (\alpha x + \beta a) + 2(\alpha y + \beta b) \end{pmatrix} \\ &= M(\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b) \end{aligned}$$

$$((\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b) \in \mathbb{R}^2)$$

Donc :  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (M(x,y), M(a,b)) \in E^2 : \alpha M(x,y) + \beta M(a,b) \in E$

D'où  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ .

b)

✓ Soit  $M(x, y) \in E$ , on a :

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ y & 2y \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= x.I + y.J \end{aligned}$$

Donc  $(I, J)$  est une famille génératrice de l'espace vectoriel  $E$

✓ Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  :

On a :

$$\begin{aligned} \alpha I + \beta J = O &\Rightarrow M(\alpha, \beta) = M(0, 0) \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -2\beta \\ \beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \alpha = 0 \text{ et } \beta = 0 \end{aligned}$$

Donc  $(I, J)$  est une famille libre de l'espace vectoriel  $E$

✓ On conclut que  $(I, J)$  est une base de l'espace vectoriel  $E$

3- a)

✓  $E \subset M_2(\mathbb{R})$

✓ Soit  $(M(x, y), M(a, b)) \in E^2$ , on a :

$$\begin{aligned} M(x, y) \times M(a, b) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa - 2yb & -2xb - 2ya - 4yb \\ ya + xb + 2yb & -2yb + xa + 2bx + 2ya + 4yb \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa - 2yb & -2(xb + ya + 2yb) \\ xb + ya + 2yb & (xa - 2yb) + 2(xb + ya + 2yb) \end{pmatrix} \\ &= M(xa - 2yb, xb + ya + 2yb) \end{aligned}$$

$$((xa - 2yb, xb + ya + 2yb) \in \mathbb{R}^2)$$

Donc :  $\forall (M(x, y), M(a, b)) \in E^2 : M(x, y) \times M(a, b) \in E$

D'où  $E$  est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

b) Montrons que  $(E, +, \times)$  est un anneau commutatif

- ✓  $(E, +)$  est un groupe commutatif ( $(E, +, \cdot)$  est un espace vectoriel)
- ✓ " $\times$ " est associative
- ✓ " $\times$ " est distributive par rapport à "+"
- ✓ Soit  $(M(x, y), M(a, b)) \in E^2$  :

$$\begin{aligned} M(x, y) \times M(a, b) &= M(xa - 2yb, xb + ya + 2yb) \\ &= M(ax - 2by, bx + ay + 2by) \\ &= M(a, b) \times M(x, y) \end{aligned}$$

Et par suite  $(E, +, \times)$  est un anneau commutatif .

4- a) Soit  $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$ , on a :

✓

$$\begin{aligned} \varphi(z \times z') &= \varphi((x + iy) \times (a + ib)) \\ &= \varphi((xa - yb) + i(xb + ya)) \\ &= M((xa - yb + xb + ya); -(xb + ya)) \end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned} \varphi(z) \times \varphi(z') &= \varphi(x + iy) \times \varphi(a + ib) \\ &= M(x + y, -y) \times M(a + b, -b) \\ &= M((x + y)(a + b) - 2(-y)(-b), (x + y)(-b) - y(a + b) + 2(-y)(-b)) \\ &= M(xa + xb + ya + yb - 2yb; -xb - yb - ya - yb + 2yb) \\ &= M(xa + xb + ya - yb; -(xb + ya)) \end{aligned}$$

Donc  $\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$  :  $\varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$

Donc  $\varphi$  est un homomorphisme de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  vers  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

b)

- ✓ Soit  $M(x, y) \in E^*$

Existe-t-il  $z$  de  $\mathbb{C}^*$ , tel que  $\varphi(z) = M(x, y)$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = M(x, y) &\Leftrightarrow \varphi(a + ib) = M(x, y) \\ &\Leftrightarrow M(a + b, -b) = M(x, y) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ -b = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = x - b \\ b = -y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = x + y \text{ et } b = -y \end{aligned}$$

Donc  $\forall M(x, y) \in E^* \exists (a, b) = (x + y, -y) \in (\mathbb{R}^*)^2 : \varphi(a + ib) = M(x, y)$

Donc  $\varphi$  est surjective

Et par suite  $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

c) On a  $\varphi$  est un homomorphisme surjective

Et puisque  $(\mathbb{C}^*, \times)$  est un groupe commutatif alors  $(\varphi(\mathbb{C}^*), \times)$  est aussi un groupe commutatif

Et comme  $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ , on a donc  $(E^*, \times)$  est un groupe commutatif.

5- On a :

✓  $(E, +)$  est un groupe commutatif.

✓  $(E^*, \times)$  est un groupe commutatif.

✓ " $\times$ " est distributive par rapport à "+"

Donc  $(E, +, \times)$  est un groupe commutatif.

## Corrigé de l'exercice 2 :

1- Soit  $p$  un nombre premier tel que :  $p = 3 + 4k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )

On a :  $p - 5 = 4k - 2 = 2(2k - 1)$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )

Soit  $x \in \mathbb{Z}$  :

On a :

$$\begin{aligned} x^2 \equiv 1[p] &\Rightarrow (x^2)^{2k-1} \equiv 1^{2k-1}[p] \\ &\Rightarrow x^{4k-2} \equiv 1[p] \\ &\Rightarrow x^{p-5} \equiv 1[p] \end{aligned}$$

Donc pour tout entier relatif  $x$ , si  $x^2 \equiv 1[p]$  alors  $x^{p-5} \equiv 1[p]$

2- a) Soit  $x$  un entier relatif vérifiant :  $x^{p-5} \equiv 1[p]$

Montrons que  $x$  et  $p$  sont premiers entre eux .

Puisque  $x^{p-5} \equiv 1[p]$  alors il existe  $u \in \mathbb{Z}$  tel que  $x^{p-5} = 1 + up$

Donc  $u \in \mathbb{Z}$  tel que  $x^{p-6} \cdot x - u \cdot p = 1$  ( $p-6 \in \mathbb{N}^*$ )

Donc d'après le théorème de Bézout  $x \wedge p = 1$

D'où  $x$  et  $p$  sont premiers entre eux .

b) On a  $p$  un nombre premier et  $x \wedge p = 1$

Donc d'après le théorème de Fermat :  $x^{p-1} \equiv 1[p]$

c)

$$\begin{aligned} 2 + (k-1)(p-1) &= 2 + (k-1)(4k+2) \\ &= 2 + 4k^2 + 2k - 4k - 2 \\ &= 4k^2 - 2k \\ &= k(4k-2) \\ &= k(p-5) \end{aligned}$$

d) On a  $x^{p-5} \equiv 1[p]$

Donc  $(x^{p-5})^k \equiv 1^k[p]$

Donc  $x^{k(p-5)} \equiv 1[p]$

Donc  $x^{2+(k-1)(p-1)} \equiv 1[p]$

Donc  $x^2 \cdot x^{(k-1)(p-1)} \equiv 1[p]$

Donc  $x^2 \cdot (x^{p-1})^{k-1} \equiv 1[p]$

Et d'autre part on a  $x^{p-1} \equiv 1[p]$

Donc  $(x^{p-1})^{k-1} \equiv 1[p]$

Donc  $x^2 \cdot (x^{p-1})^{k-1} \equiv x^2[p]$

On déduit que :  $x^2 \equiv 1[p]$

3- Résolvons dans  $\mathbb{Z}$  l'équation :  $x^{62} \equiv 1[67]$

On a pour tout entier relatif  $x$ ,  $x^2 \equiv 1[p] \Leftrightarrow x^{p-5} \equiv 1[p]$

avec  $p$  un nombre premier tel que :  $p = 3 + 4k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )

on 67 est un nombre premier et :  $67 = 3 + 4(16)$

On a :

$$\begin{aligned}
 x^{62} \equiv 1[67] &\Leftrightarrow x^{67-5} \equiv 1[67] \\
 &\Leftrightarrow x^2 \equiv 1[67] \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 1 \equiv 0[67] \\
 &\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0[67] \\
 &\Leftrightarrow x-1 \equiv 0[67] \text{ ou } x+1 \equiv 0[67] \text{ (car } p \text{ est premier)} \\
 &\Leftrightarrow x \equiv 1[67] \text{ ou } x \equiv -1[67]
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } S = \{1 + 67k / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-1 + 67k / k \in \mathbb{Z}\}$$

### Corrigé de l'exercice 3 :

I- Soit  $m \in \mathbb{C}$

On considère dans l'ensemble complexes  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E_m)$  d'inconnue  $z$  :

$$z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

1- a)

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (im + 2)^2 - 4(1)(im + 2 - m) \\
 &= -m^2 + 4im + 4 - 4im - 8 + 4m \\
 &= -m^2 + 4m - 4 \\
 &= -(m - 2)^2 \\
 &= (i(m - 2))^2 \\
 &= (im - 2i)^2
 \end{aligned}$$

b)

✓ Si  $m = 2$  : alors l'équation  $(E_2)$  admet une solution unique

$$z = \frac{-(2i + 2)}{2} = -1 - i$$

$$\text{Donc } S = \{-1 - i\}$$

✓ Si  $m \in \mathbb{C} - \{2\}$  : alors l'équation  $(E_m)$  admet deux solutions :

$$z = \frac{-(im+2)+(im-2i)}{2(1)} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-(im+2)-(im-2i)}{2(1)}$$

$$z = \frac{-2-2i}{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-2im-2+2i}{2}$$

$$z = -1-i \quad \text{ou} \quad z = -1-im+i$$

Donc  $S = \{-1-i, -1-im+i\}$

2- Pour  $m = i\sqrt{2}$

✓

$$\begin{aligned} -1-i &= \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \sqrt{2} \left( -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned} -1-im+i &= -1-i(i\sqrt{2})+i \\ &= -1+\sqrt{2}+i \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \sqrt{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \sqrt{2} \left( e^{i(0)} + e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \right) \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{8}} \left( e^{i\frac{-3\pi}{8}} + e^{i\frac{3\pi}{8}} \right) \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{8}} \times 2 \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ &= 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cdot e^{i\frac{3\pi}{8}} \quad \left( \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0 \right) \end{aligned}$$

## II-

1- Soit  $R$  la rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  qui transforme  $M$  en  $M'$

a) l'affixe  $z$  du centre de la rotation  $R$  est solution de l'équation  $z = -iz - 1 + i$

$$z = -iz - 1 + i$$

$$(1+i)z = -1+i$$

$$z = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{i(1+i)}{(1+i)} = i$$

Donc  $z = \omega$

D'où  $\Omega$  est le centre de  $R$

b) Déterminons l'affixe  $b$  de  $B$ , où  $B$  est le point tel que :  $A = R(B)$

$$a = -ib - 1 + i$$

$$ib = -1 + i - a$$

$$b = \frac{-1 + i - a}{i}$$

$$b = \frac{-1 + i + 1 + i}{i}$$

$$b = \frac{2i}{i}$$

$$\boxed{b = 2}$$

2- a) On a :

✓

$$m' - a = -im - 1 + i + 1 + i$$

$$= -im + 2i$$

$$= -i(m - 2)$$

$$= -i(m - b)$$

✓

$$\frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b) = \frac{i + 1 + i}{i - 2}(m - b)$$

$$= \frac{1 + 2i}{-2 + i}(m - b)$$

$$= \frac{-i(-2 + i)}{-2 + i}(m - b)$$

$$= -i(m - b)$$

$$\text{Donc : } m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$$

b)

✓ Si  $m = a$  : le résultat demandé est évident

✓ Si  $m \neq a$  :

$$\text{On a : } \frac{m' - a}{m - a} = \frac{\omega - a}{\omega - b} \times \frac{m - b}{m - a}$$

$$\begin{aligned}
 A, M \text{ et } M' \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow \frac{m' - a}{m - a} \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\omega - a}{\omega - b} \times \frac{m - b}{m - a} \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow A, B, \Omega \text{ et } M \text{ sont cocycliques}
 \end{aligned}$$

c) On a :  $A, M$  et  $M'$  sont alignés  $\Leftrightarrow A, B, \Omega$  et  $M$  sont cocycliques

Et par suite  $M$  appartient au cercle circonscrit au triangle  $AB\Omega$  rectangle et isocèle en  $\Omega$

$$(A = R(B))$$

Donc  $M$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$

$$\checkmark \text{ De rayon : } r = \frac{AB}{2} = \frac{|b - a|}{2} = \frac{|3 + i|}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\checkmark \text{ Et de centre le point } I \text{ d'affixe : } z_I = \frac{a + b}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

## Corrigé de l'exercice 4 :

### Partie I :

1- a) soit  $x \in ]0, +\infty[$  :

on a :

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \frac{t}{1+t} dt &= \int_0^x \frac{1+t-1}{1+t} dt \\
 &= \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\
 &= \int_0^x \left(1 - \frac{(1+t)'}{1+t}\right) dt \\
 &= [t - \ln|1+t|]_0^x \\
 &= x - \ln(1+x)
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in ]0, +\infty[) ; \int_0^x \frac{t}{1+t} dt = x - \ln(1+x)$$

b) Soit  $x \in ]0, +\infty[$  :

$$\begin{cases} u = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{u} \\ t \cdot dt = \frac{1}{2} du \\ t = 0 \rightarrow u = 0 \\ t = x \rightarrow u = x^2 \end{cases}$$

$$\int_0^x \frac{t}{1+t} dt = \int_0^{x^2} \frac{du}{1+\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}} du$$

$$\text{Donc } (\forall x \in ]0, +\infty[) ; \int_0^x \frac{t}{1+t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}} du$$

c) Soient  $x \in ]0, +\infty[$  et  $u \in [0, x^2]$  :

$$\text{On a } 0 \leq u \leq x^2$$

$$\text{Donc } 0 \leq \sqrt{u} \leq x$$

$$\text{Donc } 1 \leq 1 + \sqrt{u} \leq 1 + x$$

$$\text{Donc } \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+\sqrt{u}} \leq 1$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{1}{2(1+\sqrt{u})} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \int_0^{x^2} \frac{1}{2(1+x)} du \leq \int_0^{x^2} \frac{1}{2(1+\sqrt{u})} du \leq \int_0^{x^2} \frac{1}{2} du$$

$$\text{Et par suite : } (\forall x \in ]0, +\infty[) ; \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

2- On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in ]0, +\infty[) ; \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Partie II :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  : 
$$\begin{cases} f(x) = \left( \frac{x+1}{x} \right) \ln(1+x) & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1- a) On a :  $f(0) = 1$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \end{cases}$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} \ln(1+x) = f(0)$  alors  $f$  est continue à droite en 0

b) On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x+1}{x} \ln(1+x) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1) \ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(1+x)}{x^2} + \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc :  $f$  est dérivable à droite en 0 et on a  $f'_d(0) = \frac{1}{2}$

c)

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \ln(x+1) = +\infty$$

$$\text{Car : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty \end{cases}$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+1}{x} \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{x} \right)^2 \times \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

$$\text{Car : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{x} \right)^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \end{cases}$$

✓ (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de  $+\infty$

2- a) on a :

$f_1 : x \mapsto \frac{x+1}{x}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$

$f_2 : x \mapsto \ln(1+x)$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$

Donc  $f = f_1 \times f_2$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$

Soit  $x \in ]0, +\infty[$  :

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \left( \frac{x+1}{x} \right) \ln(x+1) \right)' \\ &= \left( \frac{x+1}{x} \right)' \ln(x+1) + \frac{x+1}{x} (\ln(x+1))' \\ &= \frac{-1}{x^2} \ln(x+1) + \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{x+1} \\ &= -\frac{1}{x^2} \ln(x+1) + \frac{1}{x} \\ &= \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \end{aligned}$$

Donc :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

b) on a  $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

comme  $x^2 > 0$  alors le signe de  $f'(x)$  est le même que le signe de  $x - \ln(1+x)$

on a  $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

donc  $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; \frac{x^2}{2(1+x)} \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}x^2$

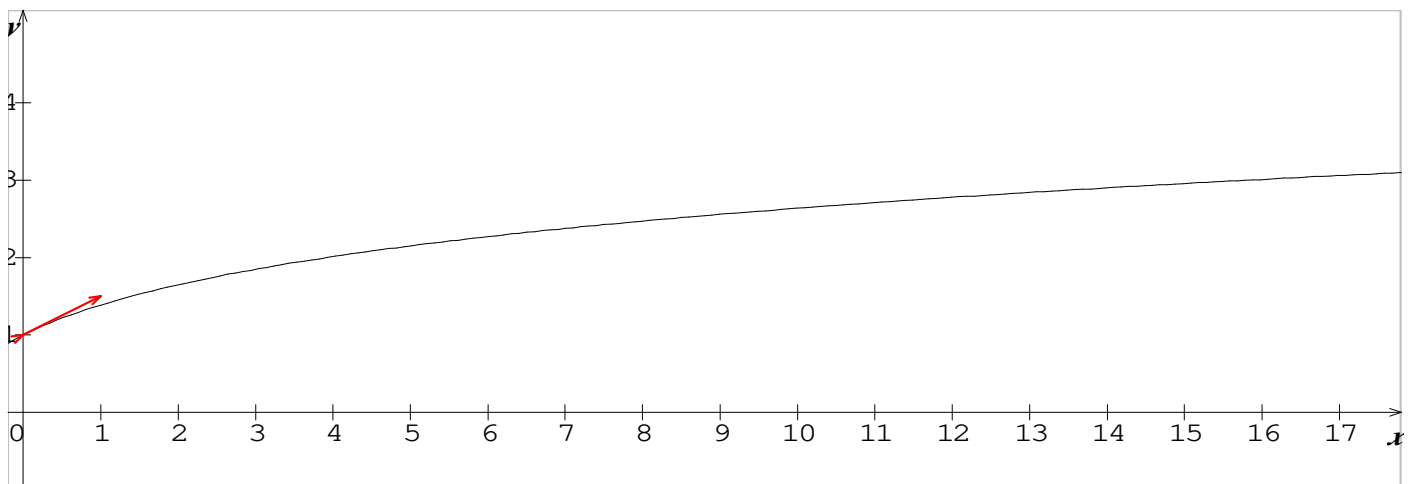
donc  $f'(x) > 0$

et par suite  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$

c) on a  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$

donc  $f(]0, +\infty[) = \left[ f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = [1, +\infty[$

3-



Partie III :

1- a) on a  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$  ;  $\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

donc  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$  ;  $0 < \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

et par suite  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$  ;  $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$

b)

✓ on a  $g$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$

soit  $x \in ]0, +\infty[$  :

on a :  $g'(x) = f'(x) - 1$

et comme  $f'(x) \leq \frac{1}{2}$  alors  $f'(x) - 1 < 0$

donc  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$  ;  $g'(x) < 0$

et par suite  $g$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$

✓ on a  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$

donc  $g(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[ = ]-\infty, 1[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{f(x)}{x} - 1 \right) \\ &= -\infty \\ &\text{car } \left( \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

c) On a :

- ✓  $g$  est continue sur  $]0, +\infty[$
- ✓  $g$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$
- ✓  $0 \in g(]0, +\infty[)$

Donc l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $]0, +\infty[$

Et par suite l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $]0, +\infty[$

2- Soit  $a$  un réel de l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = a$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

a)

- ✓ Pour  $n = 0$  :

On a  $u_0 = a$  et  $a > 0$

Donc  $u_0 > 0$

- ✓ Soit  $n \in \mathbb{N}$

- Supposons que  $u_n > 0$
- Montrons que  $u_{n+1} > 0$  ?

On a d'après l'hypothèse de récurrence  $u_n > 0$

Et comme  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$

Alors  $f(u_n) > f(0)$

Donc  $u_{n+1} > 1 > 0$

- ✓ On conclut que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

b) Soit  $n \in \mathbb{N}$

On a :

- ✓  $f$  est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités  $u_n$  et  $\alpha$
- ✓  $f$  est dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités  $u_n$  et  $\alpha$

$$\checkmark (\forall x \in ]0, +\infty[) ; 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc d'après l'inégalité des accroissements finis : } |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$\text{Et par suite } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$(f(u_n) = u_{n+1} \text{ et } f(\alpha) = \alpha)$$

c)

✓ Pour  $n = 0$  :

$$\text{On a } |u_0 - \alpha| = |a - \alpha| \text{ et } \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a - \alpha| = |a - \alpha|$$

$$\text{Donc } |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a - \alpha|$$

✓ Soit  $n \in \mathbb{N}$

- Supposons que  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

- Et montrons que :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|$  ?

$$\text{On a d'après la question précédente } \boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|} \quad (*)$$

$$\text{Et on a d'après l'hypothèse de récurrence } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$$

$$\text{Donc } \boxed{\frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|} \quad (**)$$

$$\text{De } (***) \text{ et } (**), \text{ on obtient : } \boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|}$$

$$\checkmark \text{ On conclut que } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$$

d) On a  $-1 < \frac{1}{2} < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha| = 0$$

$$\text{Et comme } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$$

Alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

### Corrigé de l'exercice 5 :

On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

1-

✓ On a  $t \mapsto e^{t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$

( composée de deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  )

Donc  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (primitive d'une fonction qui s'annule en 0)

Et par suite  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$

✓ Soit  $x \in \mathbb{R}$  :

On a  $F'(x) = e^{x^2}$

Puisque :  $e^{x^2} > 0$

Alors :  $(\forall x \in \mathbb{R}) F'(x) > 0$

D'où  $F$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2-

✓ On a :  $t^2 \geq 0$

Donc :  $e^{t^2} \geq 1$

Donc :  $\int_0^x e^{t^2} dt \geq \int_0^x 1 dt$

Donc :  $(\forall x \in \mathbb{R}) F(x) \geq x$

✓ On a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ (\forall x \in \mathbb{R}) F(x) \geq x \end{cases}$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

3-

▪ Soit  $x \in \mathbb{R}$ , On a :

✓  $-x \in \mathbb{R}$

✓  $F(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt$

$$\begin{pmatrix} u = -t \Leftrightarrow t = -u \\ dt = -du \\ t = 0 \rightarrow u = 0 \\ t = -x \rightarrow u = x \end{pmatrix}$$

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt = -\int_0^x e^{(-u)^2} du = -\int_0^x e^{u^2} du = -\int_0^x e^{t^2} dt = -F(x)$$

Donc  $F$  est impaire .

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} F(-u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} -F(u) = -\infty$$

4- Puisque  $F$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$   
alors  $F$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $F(\mathbb{R})$

$$\text{tel que : } F(\mathbb{R}) = F(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right[ = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$$

5- On a  $F(0) = 0$

Et  $F'(0) = 1$  donc  $F'(0) \neq 0$

✓ On a  $F$  est dérivable en 0 et  $F'(0) \neq 0$

Donc  $G$  est dérivable en 0

$$\text{Et on a : } G'(0) = (F^{-1})'(0) = (F^{-1})'(F(0)) = \frac{1}{F'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

つづく