Bac Sciences Mathématiques
National 2018

EXERCICE 1 : (3,5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire , de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0,25 1- Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0,25 2- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

0,5 b) On pose $J=M(0,1)$. Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel réel $(E,+,\cdot)$

0,5 3- a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0,5 b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif .

4- Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\right)\quad;\quad \varphi(x+iy)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix}x+y&2y\\-y&x-y\end{pmatrix}$$

0,5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0,5 b) On pose $E^*=E-\{O\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

0,25 c) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif .

0,25 5- Montrer que $(E,+,\times)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 2 : (3 points)

Soit p un nombre premier tel que : $p=3+4k \quad (k\in\mathbb{N}^*)$

0,5 1- Montrer que pour tout entier relatif x, si $x^2\equiv1[p]$ alors $x^{p-5}\equiv1[p]$

2- Soit x un entier relatif vérifiant : $x^{p-5}\equiv1[p]$

0,5 a) Montrer que x et p sont premiers entre eux .

0,5 b) Montrer que : $x^{p-1}\equiv1[p]$.

0,5	c) Vérifier que : $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$
0,5	d) En déduire que : $x^2\equiv 1[p]$
0,5	3- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62}\equiv 1[67]$

EXERCICE 3 : (3,5 points)

	Soit m un nombre complexe .
	I- On considère dans l'ensemble complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z : $$z^2+(im+2)z+im+2-m=0$$
0,25	1- a) Vérifier que $\Delta=(im-2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)
0,5	b) Donner, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)
0,5	2- Pour $m=i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.
	II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
	On considère les points A, Ω, M et M' d'affixes respectifs $a=-1-i$, $\omega=i$, m et $m'=-im-1+i$
	1- Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'
0,25	a) Vérifier que Ω est le centre de R
0,5	b) Déterminer l'affixe b de B, où B est le point tel que : $A=R(B)$
0,5	2- a) Vérifier que : $m'-a=\frac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$
0,5	b) En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B, Ω et M sont cocycliques .
0,5	c) Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A, M et M' soient alignés Est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon .

EXERCICE 4 : (7,5 points)

	Partie I :
0,5	1- a) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad ;\quad \int_0^x \frac{t}{1+t}dt=x-\ln(1+x)$
0,5	b) En utilisant le changement de variable $u=t^2$, montrer que : $$(\forall x\in]0,+\infty[)\quad ;\quad \int_0^x \frac{t}{1+t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{u}}du$$

0,5 c) En déduire que : $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad ; \quad \dfrac{1}{2(1+x)} \leq \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

0,25 2- Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$: $\begin{cases} f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) \quad ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0,25 1- a) Montrer que f est continue à droite en 0

0,5 b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

(On pourra utiliser le résultat de la question I.2)

0,75 c) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 2- a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$, puis vérifier que :

$$(\forall x \in]0,+\infty[) \quad ; \quad f'(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

0,25 b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

0,25 c) Vérifier que : $f([0,+\infty[) = [1,+\infty[$

0,5 3- Représenter graphiquement la courbe (C)

(On construira la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0)

Partie III :

1- On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$

0,5 a) Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad ; \quad 0 < f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$

0,5 b) En déduire que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ puis montrer que $g(]0,+\infty[) =]-\infty,1[$

0,25 c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $]0,+\infty[$

2- Soit a un réel de l'intervalle $]0,+\infty[$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$

0,25 **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_n > 0$

0,5	**b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\left\|u_{n+1}-\alpha\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|u_n-\alpha\right\|$
0,5	**c)** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\left\|u_n-\alpha\right\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left\|a-\alpha\right\|$
0,25	**d)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

EXERCICE 5 : (2,5 points)

	On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$
0,5	1- Montrer que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
0,5	2- a) Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $F(x) \geq x$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$
0,5	b) Montrer que F est impaire , en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$
0,5	c) Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
0,5	d) Montrer que la bijection réciproque G de la fonction F est dérivable en 0, puis calculer $G'(0)$