

Correction proposée :
examen national R.S.M - 2019

Ex 1. (structure algébrique)

on définit sur \mathbb{C} la loi de composition interne $*$ par: $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

$$(x+iy) * (a+ib) = xa + i(x^2b + a^2y)$$

1
1-a: Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ tq: $z = x+iy, x, y \in \mathbb{R}$
 $z' = a+ib, a, b \in \mathbb{R}$

ona:

$$\begin{aligned} z * z' &= xa + i(x^2b + a^2y) \\ &= a(x+iy) + i(ya^2 + bx^2) \\ &= z' * z \end{aligned}$$

1-c: la loi $*$ est commutative sur \mathbb{C}

1-b: Soit $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ tq: $z = x+iy$
 $z' = a+ib$
 $z'' = m+in$
tq: $x, y, a, b, m, n \in \mathbb{R}$.

il suffit de calculer $z * z'$ et $z' * z''$
on vérifie que:

$$(z * z') * z'' = z * (z' * z'')$$

1-d: la loi $*$ est associative sur \mathbb{C}

1-c: comme $*$ est commutative, il suffit de résoudre l'équation $z * e = z$ d'inconnue $e = a+ib$ et $\forall z \in \mathbb{C}$.

Soit: $z * \mathbb{C}^* \text{ tq: } z = x+iy$

$$\begin{aligned} z * e = z &\Leftrightarrow xa + i(x^2b + a^2y) = x+iy \\ &\Leftrightarrow xa = x, x^2b + a^2y = y \\ &\Leftrightarrow a = 1, x^2b = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 1, b = 0 \\ &\Leftrightarrow e = 1 \end{aligned}$$

pour $z = 0$ ona: $0 * 1 = 0$

d'où: $*$ admet $e = 1$ comme l'élément neutre.

1-d: Soit: $z = x+iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
 $z' = a+ib$ ($a, b \in \mathbb{R}^2$)

ona: $z * z' = e = 1$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow xa &= 1 \text{ et } x^2b + a^2y = 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{x} \text{ et } b = \frac{-y}{x^2} \end{aligned}$$

comme $*$ est commutative

alors: le symétrisé de z est z'
avec: $z' = \frac{1}{x} - i \frac{y}{x^2}$

2 $E = \{x+iy / x > 0, y \in \mathbb{R}\}$

Soit $z, z' \in E, z = x+iy, x > 0$
 $z' = a+ib, a > 0$

ona:

$$z * z' = xa + i(x^2b + a^2y) \in E$$

car: $x, a > 0 \Rightarrow x \cdot a > 0$

2-c: E est stable par $*$

2-b

ona: $*$ est associative
• toute élément de E est symétrisable de $sg\ z' = \frac{1}{x} - i \frac{y}{x^2}$
(car: $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$)
 $*$ est commutative

alors: $(E, *)$ est un groupe abélien

3: $G = \{1+iy / y \in \mathbb{R}\}$
ona: $G \subset E$ car: $1 > 0$

Soit: $z, z' \in G$ tq: $z = 1+iy$
 $z' = 1+ib$

ona $z * sg(z') = z * (1-ib)$

$$= 1 + i(-b+y) \in G$$

d'où: G est un sous grp de $(E, *)$

24. $F = \{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, x > 0, y \in \mathbb{R} \}$

(a) Soit: $M(x,y), M(a,b) \in F$ on a:

$$M(x,y) \times M(a,b) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb+ya \\ 0 & xa \end{pmatrix} \in F$$

car: $xa > 0$ et $xb+ya \in \mathbb{R}$

de même, $M(a,b) \times M(x,y) = \begin{pmatrix} xa & xb+ya \\ 0 & xa \end{pmatrix}$

$\%: F$ est stable par \times dans $M_2(\mathbb{R})$

(b) $\varphi: E \rightarrow F$
 $x+iy \rightarrow M(x,y)$

Soit $z = x+iy, z' = a+ib \in E$

alors:

$$\varphi(z * z') = M((xa)^2, x^2b + a^2y)$$

et on a:

$$\varphi(z) \times \varphi(z') = M(x^2, y) \times M(a^2, b) \in F$$

$$= \begin{pmatrix} (xa)^2 & x^2b + a^2y \\ 0 & (xa)^2 \end{pmatrix} \text{ (question a)}$$

$$= M((xa)^2, x^2b + a^2y)$$

alors: $\varphi(z * z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$ (i)

Soit: $M(a,b) \in F, a > 0, b \in \mathbb{R}, z \in E$

$$\varphi(z) = M(a,b) \Leftrightarrow M(x^2, y) = M(a,b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$(a > x > 0) \Leftrightarrow x = \sqrt{a}, y = b$$

alors: φ est biij de $E \rightarrow F$ (ii)

(i), (ii) $\Rightarrow \varphi$ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers (F, \times)

\square : comme $(E, *)$ est un grp commutatif. $\varphi: (E, *) \rightarrow (F, \times)$ est un iso.

alors: (F, \times) est un groupe commutatif

Fin structure

Exercice II: les nombres complexes

Soit $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:

$$(E): z^2 - (1+i)(m+1)z + 2im = 0$$

$$1-a: \Delta = (1+i)^2(m+1)^2 - 8im$$

$$(1+i)^2 = 2i = (1+i)^2 [(m+1)^2 - 2m]$$

$$= (1+i)^2 (m-1)^2$$

si $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$ or $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Absurde.

alors: $\Delta \neq 0, \forall m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$1-b \text{ comme: } \Delta = (m-1)^2 (1+i)^2$$

$$\text{alors: } z_1 = \frac{(m+1)(1+i) + (m-1)(1+i)}{2} = m(1+i)$$

$$z_2 = \frac{(m+1)(1+i) - (m-1)(1+i)}{2} = 1+i$$

alors: les solutions de (E) sont:

$$z_1 = (1+i) \cdot m, z_2 = 1+i$$

2

2. ~~...~~ $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$
 $\mathcal{R}-a$: comme z_1, z_2 sont le sol.
de (E)

d'au: (E) $\Leftrightarrow (z - z_1)/(z - z_2) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - z(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0$

alors: $\begin{cases} z_1 + z_2 = (1+i)(1+m) \\ z_1 z_2 = -2im \end{cases}$ (*)

or: $1 + e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}})$
 $= 2 \cdot e^{i\frac{\alpha}{2}} \cdot \cos(\frac{\alpha}{2})$

(d'après la Formule d'Euler).

alors: $z_1 + z_2 = (1 + e^{i\frac{\pi}{2}}) \cdot (1 + e^{i\theta})$
 $= 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\theta}{2}$
 $= 2\sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})} \cdot \cos \frac{\theta}{2}$

comme: $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\theta}{2} > 0$

d'au: $z_1 + z_2 = 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})}$

conclusion:

$|z_1 + z_2| = 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}$
 $\arg(z_1 + z_2) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} [2\pi]$

$\mathcal{R}-b$:

$z_1 z_2 = -2im$. (d'après *)

si $z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow -2im \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow m \in i\mathbb{R}$

d'au: $\exists x \in \mathbb{R}$ tq: $m = ix$

$m = e^{i\theta} \Rightarrow |m| = 1 = |x| \Rightarrow x = \pm 1$

or: $\theta \in]0, \pi[$ d'au: $x > 0$

conclusion: $z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow m = i$

d'au: $z_1 + z_2 = (1+i)^2 = 2i$

II:

or: $\Omega(w)$ est le milieu de $[c, d]$

d'au: $w = \frac{c+d}{2}$

or: $D(d)$ est l'image du $B(c, b)$
par rotation de centre $O(d)$

et d'angle $\theta = \pi/2$

d'au: $d - z_0 = e^{i\theta} (b - z_0)$

$\Leftrightarrow d = ib = i(1+i)xm$

$\Rightarrow d = (i-1)m$

d'au: $w = \frac{c+d}{2} = \frac{(1-i) + (i-1)m}{2}$

or: $w = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$

$\frac{b-a}{w} = \frac{(1+i)m - (1+i) \times 2}{(1-i)(1-m) \times 2}$

$= \frac{(1+i)(m-1)}{(1-i)(1-m)} \times 2$ $\begin{cases} m \neq 1 \text{ car } \\ m \in i\mathbb{R} \end{cases}$

$= \frac{1+i}{i-1} \times 2$

$= \frac{(1+i)(1+i)}{-2} \times 2 = -(1+i)^2$

$\frac{b-a}{w-z_0} = -2i$, $z_0 = 0$

$\frac{b-a}{w-z_0} = -2i \Rightarrow \begin{cases} \arg(AB) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ AB = 2 \cdot O\Omega \end{cases}$

alors: $(O\Omega) \perp (AB)$ et $AB = 2 \cdot O\Omega$

II-2: $(\circ\Omega) \cap (AB) = \{H(\Omega)\}$.

2-9: ans: $H \in (AB)$ d'ca:

les pts A, B, H sont des pts droits.
(alignés). d'ca: $\arg\left(\frac{z_H - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pi \pmod{\pi}$

$\arg\left(\frac{z_H - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overline{AH}, \overline{AB}) \equiv \pi \pmod{\pi}$

d'ca: $\frac{b-a}{b-a} \in \mathbb{R} \quad (e^{i\pi} = -1)$

ans: $(\circ H) \perp (AB)$

d'ca: $\arg\left(\frac{z_H - z_0}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

alors: $\frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R} \quad (e^{i\frac{\pi}{2}} = i)$

$\frac{b-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \frac{b-a}{b-a} = x$
 $\frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}: \frac{h}{b-a} = iy$

$\frac{b-a}{b-a} = x \Leftrightarrow \frac{h}{b-a} = x + \frac{a}{b-a}$

$\Leftrightarrow \boxed{iy = x + \frac{1}{m-1}}$

d'ca:

$iy = x + \frac{1}{m-1}$
 $-iy = x + \frac{1}{\bar{m}-1}$

$\Rightarrow 2iy = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{\bar{m}-1}$

$iy = \frac{1}{2} \frac{\bar{m}-m}{(m-1)(\bar{m}-1)}$

d'ca: $h = (b-a) \cdot iy$

$\boxed{h = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{\bar{m}-m}{\bar{m}-1}}$

Rq: m, \bar{m} sont $\neq 1$ car $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Conclusion

$\boxed{h = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{\bar{m}-m}{\bar{m}-1}}$

Fin complexe.

Exercice III: Arith.

On admet que: 2969 est premier

1: on sup que: 2969 $\nmid n$.

comme: 2969 est premier.

$\{2969 \nmid n\}$

alors: $2969 \wedge n = 1$

d'après: le Théorème de Bézout.

$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2: 2969u + n \cdot v = 1$

$\Leftrightarrow \boxed{nu \equiv 1 \pmod{2969}}$

1-b: ans: $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969}$

d'ca: $(u \cdot m)^8 \equiv -(n \cdot u)^8 \pmod{2969}$

ca: $(n \cdot u)^8 \equiv 1 \pmod{2969}$

d'ca: $\boxed{(u \cdot m)^8 \equiv -1 \pmod{2969}}$

alors: $(u \cdot m)^{8 \times 371} \equiv (-1)^{371} \pmod{2969}$

q/c: $\boxed{(u \cdot m)^{2968} \equiv -1 \pmod{2969}}$

con: $2968 = 8 \times 371 \quad (4)$

1-c:

ona: $(u.m)^{2968} \equiv -1 [2969]$

d'ici: $\exists k \in \mathbb{Z}: (u.m)^{2968} = -1 + 2969k$

$\Leftrightarrow \exists u', v' \in \mathbb{Z}: (u.m)u' + 2969.v' = 1$

$(u' = -(u.m)^{2967} \text{ et } v' = k.)$

d'après: le Théorème de Bezout

ona: $2969 \nmid u.m = 1$

d'ici: $2969 \nmid u.m.$

1-d: $2969 \nmid u.m = 1$
 $\left\{ \begin{array}{l} 2969 \text{ premier} \end{array} \right.$

d'après: le Théorème de Fermat, on a

$(u.m)^{2969-1} \equiv 1 [2969]$

d'ici: $(u.m)^{2968} \equiv 1 [2969]$

2-a: ona:

$(u.m)^{2968} \equiv -1 [2969] \dots (1-b)$

$(u.m)^{2968} \equiv 1 [2969] \dots (1-d)$

Absurde.

d'ici: l'hypothèse dans la question 1 est fautive.

alors: $2969 \mid n$

2-b:

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n \equiv 0 [2969] \\ m \equiv 0 [2969] \end{array} \right.$

$\Rightarrow n^8 + m^8 \equiv [2969]$

\Rightarrow ona: $2969 \mid n$

d'ici: $n \equiv 0 [2969]$

~~d'ici: $n \equiv 0 [2969]$~~

Comme dans l'égalité:
 $n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$
m, n jouent des rôles.
Symétriques

alors: si on suppose que $2969 \nmid m$.

on utilisant la même démarche de la question 1, on va trouver l'Absurde, $(1 = -1)$

conclusion: $2969 \mid m$

d'ici:

$n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$

$\Leftrightarrow n \equiv 0 [2969] \text{ et } m \equiv 0 [2969]$

Proposé par: SAÏD IBN JAA CAF

Xymath

Partie Analyse :

Exercice 4 : (10pts) :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4x \cdot (e^{-x} + \frac{x}{2} - 1)$

1.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x \cdot (e^{-x} + \frac{x}{2} - 1)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot (2 + x \frac{e^{-x}}{2} - e^x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ car: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty$

car: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$

2-a: la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , comme produit de fcts dérivables sur \mathbb{R}

et on a: $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 4(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1) + 4x(-e^{-x} + \frac{1}{2})$
 $= 4(e^{-x} - x e^{-x} + x - 1)$

$f'(x) = 4(x-1)(1-e^{-x})$

2-b: Soit $x \in \mathbb{R}$

ona: $f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(x-1)$

Si $x < 0$: ona: $e^{-x} > 1$
 $\left\{ \begin{array}{l} 1-x > 0 \\ \end{array} \right.$

d'où: $\forall x < 0, f'(x) > 0$

Si $x > 0$: ona: $e^{-x} < 1$

$x \rightarrow 1-x$ change le signe

d'où: $\forall x \in [0; 1]: f'(x) \leq 0$

$\forall x \in [1; +\infty[: f'(x) \geq 0$

conclusion:

f str croissante sur $]-\infty, 0]$ et $[1; +\infty[$

f str décroissante sur $[0, 1]$

et on a: le Tableau de variation

	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+		-		+
f		↗	↘	↗	

2-c

ona: f continue, strictement croissante sur $]3/2, 2]$

d'où: f est bijection de $]3/2, 2]$ vers $]$

$f(]3/2, 2]) =]6x(e^{-3/2} + \frac{3}{4} - 1); 8(e^{-2})]$

comme: $e^{3/2} \approx 4,5 > 4$

d'où: $6(\frac{1}{e^{3/2}} + \frac{1}{4}) < 0$

alors: $0 \in]f(3/2), f(2)[$

d'où: 0 admet un seul antécédent car le note $\alpha \in]3/2, 2[$

c/c: $\exists \alpha \in]3/2, 2[: f(\alpha) = 0$

2-d

$f(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow 4\alpha(e^{-\alpha} + \frac{\alpha}{2} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$\Leftrightarrow e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ car: $\alpha > \frac{3}{2}$

3-a:
 on a: f' continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$. (produit de fact-)

et $f'(0) = f'(1) = 0$

alors: d'après le Théorème de ROLL

$\exists x_0 \in]0,1[: f''(x_0) = 0$

3-b: Soit $x \neq x_0 \in]0,1[$

on a: f'' est continue - dérivable sur l'intervalle I d'extrémités x et x_0

d'après: T.A.F

$\exists c \in I$ tq: $f'(c) = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$
 $= \frac{f''(c) - 0}{x - x_0}$

Or: $f''(x) = (3-x)e^{-x}$ (calcul)

d'où: $f''(c) = (3-c)e^{-c} > 0$

car c dans l'intervalle I d'ext x et x_0 , $I \subset]0,1[$.

Conclusion: $\forall x \in]0,1[, x \neq x_0, \frac{f''(x)}{x-x_0} > 0$

3-c:

on a: $\begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ \frac{f''(x)}{x-x_0} > 0 \end{cases}$

d'où: f'' s'annule en $x = x_0$ avec: changement de signe

alors: $I(x_0, f(x_0))$ est un pt d'inflexion de la courbe

4-a: Les branches infinies

on a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 = +\infty$ car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

alors: (\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction (oy) , au voisinage de $+\infty$

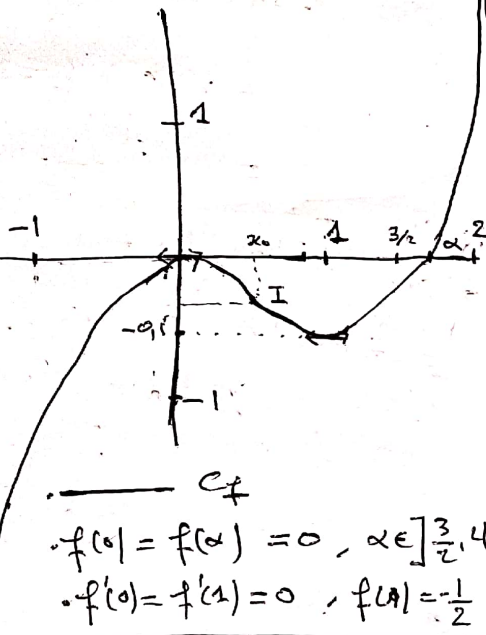
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 = +\infty$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(1 + \frac{x}{2} - e^x \right) = +\infty$

car: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

d'où: (\mathcal{C}_f) admet 1 branche parabolique de direction (oy) au vois de $+\infty$

(7)

4-b: représentation graphique



$f(0) = f(\alpha) = 0, \alpha \in]\frac{3}{2}, 4[$
 $f'(0) = f'(2) = 0, f(0) = -\frac{1}{2}$

5-a: d'après le Tableau de variation on a
 $\forall x \in]-\infty, 0]: f(x) \leq 0$
 $\forall x \in [0, \alpha[: f(x) \leq 0$

d'où: $\forall x \in]-\alpha, \alpha[: f(x) \leq 0$

5-b:

$$\int_x^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha 4x \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right) dx$$

$$= \int_0^\alpha (4xe^{-x} + 2x^2 - 4x) dx$$

$$\int_0^\alpha 4xe^{-x} dx = \left[4xe^{-x} \right]_0^\alpha + \int_0^\alpha 4e^{-x} dx$$

$$= -4\alpha e^{-\alpha} + \left[4e^{-x} \right]_0^\alpha$$

$$= 4 - 4\alpha e^{-\alpha} - 4e^{-\alpha}$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha + 1)$$

d'où:

$$\int_x^\alpha f(x) dx = 4 - 4e^{-x}(\alpha + 1) + 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\alpha - 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\alpha$$

$$= 4 - 4e^{-x}(\alpha + 1) + \frac{2}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2$$

on: $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2} (2 - d)$

conclusion: (calcul)

$$\int_x^\alpha f(x) dx = \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3)$$

Conclusion:

comme: $\forall x \in [0, \alpha] : f(x) \leq 0$

$$\int_0^\alpha f(x) dx \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 < 3$$

$$\Leftrightarrow |\alpha| < \sqrt{3}$$

on: $\alpha > 2$

$$\boxed{\text{d'où: } \alpha \in]2, \sqrt{3}[}$$

5-d

$$(\text{aire}) = \int_0^\alpha |f(x)| dx \text{ u.a}$$

$$= - \int_0^\alpha f(x) dx \cdot \text{u.a}$$

$$\boxed{(\text{aire}) = \frac{2}{3}\alpha(3 - \alpha^2) \cdot \text{cm}^2}$$

Partie II: cm. de f(x):

$$U_{n+1} = f(u_n) + u_n, u_0 < \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$$

1-a: pour $n=0$, $u_0 < \alpha$.
 Supposons que $u_n < \alpha$, Montrons que $u_{n+1} < \alpha$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

ona: $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$.

$u_n < \alpha \Rightarrow f(u_n) \leq 0$ (I-5-a) (H.R.)

$\Rightarrow f(u_n) + u_n \leq u_n \leq \alpha$

$\Rightarrow f(u_n) + u_n \leq \alpha$

$\Rightarrow u_{n+1} \leq \alpha$ CQFD

gc: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq \alpha$

1-b:

ona: $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$

or: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq \alpha$.

d'après: I-5-a: $f(u_n) \leq 0$

conclu: $u_{n+1} - u_n \leq 0$

gc: (u_n) est décroissante

2-a: Supposons que $0 < u_0 < \alpha$.

$g(x) = e^{-x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$.

g est dérivable sur \mathbb{R} , comme somme de fct dérivables

alors: $g'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \ln 2 > 0$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	-	!	+
g			

\searrow $g(\ln 2)$ \nearrow

ona: $\forall x \in \mathbb{R}: g(x) \geq g(\ln 2)$

or $g(\ln 2) = e^{-\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{4}$

$= \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} > 0$

conclu: $\ln 2 = 0,69 > 1/2$

conclu: $\forall x \in \mathbb{R}: g(x) > 0$

2-b:

ona: $f(x) + x = 4x(e^x + \frac{x}{2} - 1) + x$

$= x(4e^x + 2x - 4 + 1)$

$= 4x(e^x + \frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{4})$

$f(x) + x = 4 \cdot x \cdot g(x)$

Rq: dans l'énoncé il y'a 1 fait

$f(x) + x = x g(x)$ doit remplacer par: $f(x) + x = 4x g(x)$!

gc: $f(x) + x = 4x g(x)$

ona: $u_0 \geq 0$.

pour $n=0$, $u_0 \geq 0$

Supposons que $u_n \geq 0$, Montrons $u_{n+1} \geq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

ona: $u_{n+1} = f(u_n) + u_n = 4u_n g(u_n)$

comme: $\forall x \in \mathbb{R} g(x) > 0$

alors: (H.R.) $\Rightarrow u_{n+1} = 4u_n g(u_n) > 0$

donc: $u_{n+1} \geq 0$

conclu: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq 0$

2-c:

cha: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq 0$
 (u_n) décroissante
alors: (u_n) décroissante, minorée par 0

d'éc: (u_n) est convergente

2-d

cha: $u_{n+1} = f(u_n) + u_n = h(u_n)$

avec: $h(x) = f(x) + x, \forall x \in \mathbb{R}$

et cha: $0 \leq u_n \leq u_0 < \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$

$x \rightarrow h(x)$ est continue sur $[0, \alpha]$

alors: $\lim u_{n+1} = \lim h(u_n) = \lim f(u_n) + u_n$

$$\Rightarrow l = f(l) + l$$

$$\Rightarrow f(l) = 0$$

or d'après l'étude et la représentation de f

cha: $l=0$ ou $l=\alpha$

ch: $u_n \leq u_0 < \alpha$
 $\Rightarrow \lim u_n = l \leq u_0 < \alpha$

conclusion:
 $\lim u_n = 0$

3: on suppose que: $u_0 < 0$

3-a: cha: $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$

comme: (u_n) est décroissante

alors: $u_n \leq u_0 < 0$
et f croissante sur $]-\infty, 0]$

d'éc: $f(u_n) \leq f(u_0)$

$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$

$\forall n \in \mathbb{N}$

10/10

3-b

pour $n=0: u_0 \leq u_0$
Supp que: $u_n \leq u_0 + n f(u_0)$
Montre: $u_{n+1} \leq u_0 + (n+1) f(u_0)$

Satisfait
cha: $u_{n+1} \leq u_n + f(u_n)$ (3-a)
 $\stackrel{(H.R)}{\leq} u_0 + n f(u_0) + f(u_0)$
 $\leq u_0 + (n+1) f(u_0)$

d'éc: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq u_0 + n f(u_0)$

3-c: $u_0 < 0 \Rightarrow f(u_0) < f(0) = 0$
 $\Rightarrow f(u_0) < 0$

d'éc: $\lim u_0 + n f(u_0) = -\infty$

conclusion:
 $\lim u_n = -\infty$

Fin

SAID ~~xyndth~~
IBN JAA