

الصفحة	<p style="text-align: center;">الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2020 - الموضوع -</p>		<p style="text-align: center;">المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والامتحانات</p>
1			
5	SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS		NS 25
**	الرياضيات		المادة
4	مدة الإنجاز	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)	الشعبة أو المسلك
9	المعامل		

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte (5) pages numérotées de 1/5 à 5/5
- L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux.
- **Le candidat doit traiter EXERCICE3 et EXERCICE4 et choisir de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2.**
- **Le candidat doit traiter au total trois (3) exercices :**

- **EXERCICE1** qui concerne l'arithmétique (au choix).....**3.5 points**

- ou bien

EXERCICE2 qui concerne les structures algébriques (au choix).....**3.5 points**

- **EXERCICE3** qui concerne les nombres complexes (obligatoire).....**3.5 points**

- **EXERCICE4** qui concerne l'analyse (obligatoire).....**13 points**

L'usage de la calculatrice est strictement interdit

Tu choisies de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2

Tu traites obligatoirement EXERCICE3 et EXERCICE4

EXERCICE1 : (3.5 points/au choix)

(Si tu choisies de traiter EXERCICE1, il ne faut pas traiter EXERCICE2)

On considère dans \mathbb{C} l'équation (D) : $7x^3 - 13y = 5$

1- Soit $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ une solution de l'équation (D)

الصفحة	2	NS 25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)
5			

- 0.5 a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.
- 0.5 b) En déduire que : $x^{12} \equiv 1 \pmod{13}$
- 1 c) Montrer que : $x^3 \equiv 10 \pmod{13}$
- 0.5 d) En déduire que : $x^{12} \equiv 3 \pmod{13}$
- 1 2- Déduire des questions précédentes, que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z} / 13\mathbb{Z}$

EXERCICE2 : (3.5 points/au choix)

(Si tu choisis de traiter EXERCICE2, il ne faut pas traiter EXERCICE1)

On note par $M_2(i)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que $(M_2(i), +, \cdot)$ est un anneau non commutatif unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et que $(i, *, ')$ est un groupe commutatif.

On considère le sous-ensemble E de $M_2(i)$ défini par : $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x \in i \text{ et } y \in i^* \right\}$.

- 0.5 1- a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(i), \cdot)$
- 0.5 b) Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans E
- 0.5 c) Vérifier que : $\left(\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \right)^* = \begin{pmatrix} a & -x \\ 0 & y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$

0.5 2- Montrer que $(E, ')$ est un groupe non commutatif.

3- On considère le sous-ensemble F de E défini par : $F = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \mid x \in i \right\}$

- 0.5 a) Montrer que l'application j définie par : $j : \left(\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \right)^* \mapsto M(x)$ est un homomorphisme de $(i, *, ')$ vers $(E, ')$.
- 1 b) En déduire que $(F, ')$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

EXERCICE3 :(3.5 points/obligatoire)

Soit m un nombre complexe non nul.

Première partie :

On considère dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z , $(E) : z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$

- 0.5 1- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) (On remarque que m est une solution de l'équation (E))

الصفحة	3	NS 25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)
5			

2- On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) autre que m

0.25 a) Vérifier que : $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$

0.5 b) Dans le cas où $m = 1 + e^{i\frac{p}{3}}$, écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2

Deuxième partie :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; u, v)$

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = m e^{i\frac{p}{3}}$ et $b = m e^{-i\frac{p}{3}}$

On note P le centre de la rotation d'angle $\frac{p}{2\theta}$ qui transforme O en A ,

Q le centre de la rotation d'angle $\frac{p}{2\theta}$ qui transforme A en B

et R le centre de la rotation d'angle $\frac{p}{2\theta}$ qui transforme B en O

0.25 1- Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.

1 2-a) Montrer que l'affixe de P est $p = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7p}{12}}$ et que l'affixe de R est $r = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{7p}{12}}$

0.5 b) Montrer que l'affixe de Q est $q = m\sqrt{2} \sin \frac{7p}{12}$

0.5 3- Montrer que $OQ = PR$ et que les deux droites (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

EXERCICE4 :(13 points/obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad (x \in]0; +\infty[) ; \quad f(x) = x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; i, j)$.

$$(\text{On prendra } \|i\| = \|j\| = 1 \text{ cm})$$

0.5 1- On appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur l'intervalle

$$[x, x+1], \text{ montrer que : } (P) \quad (x \in]0; +\infty[) ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) < \frac{1}{x}$$

0.5 2-a) En utilisant la proposition (P), montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0

الصفحة	4	NS 25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)
5			

0.5 b) En utilisant la proposition (P), montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

0.75 3-a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = 3x^2 \ln(1+x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{3(1+x)}$$

0.5 b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I
(On pourra utiliser la proposition (P))

0.25 c) Dresser le tableau de variations de f

4- Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

0.75 a) Vérifier que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g'(x) = 2x \ln(1+x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1+x)}$, en déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$

0.5 b) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$, une solution unique notée a
puis vérifier que $a \in]1; 2[$ (On prendra $\ln 2 = 0.7$ et $\ln \frac{3}{2} = 1.5$)

0.5 c) En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 0 et a

0.5 5-a) Représenter graphiquement la courbe (C).

(On précisera la demi-tangente à droite en O et la branche parabolique de (C))

0.25 b) Montrer que f est une bijection de I vers I (On note f^{-1} sa bijection réciproque)

Deuxième partie :

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $0 < u_0 < a$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

0.5 1- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < a$

0.5 2-a) Montrer que : $g(]0; a]) =]0; 1[$

0.5 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

0.25 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

0.5 3- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Troisième partie :

On considère la fonction F définie sur l'intervalle I par : $(\forall x \in I) ; F(x) = \int_x^1 f(t) dt$

0.5 1-a) Etudier suivant les valeurs de x , le signe de $F(x)$

الصفحة	5	NS 25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)
5			

- 0.5 b) Montrer que la fonction F est dérivable sur I et déterminer sa dérivée première F'
- 0.25 c) En déduire que F est strictement décroissante sur I
- 0.5 2-a) Montrer que : $(x \in]1; +\infty[) ; F(x) = (1-x) \ln 2$
- 0.25 b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 0.5 3-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :
- $$(x \in]0; +\infty[) ; F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int_x^{+\infty} \frac{t^3}{t+1} dt$$
- 0.5 b) Calculer $\int_x^{+\infty} \frac{t^3}{t+1} dt$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ (On remarque que : $\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$)
- 0.5 c) En déduire que : $(x \in]0; +\infty[) ; F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{x^4}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$
- 0.5 d) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t) dt$
- 4- Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $v_n = \int_0^1 f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx$
- 0.5 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$:
- $$-\frac{1}{2n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx - \frac{1}{2n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx = -\frac{1}{2n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx - \frac{1}{2n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx$$
- 0.5 b) En déduire que : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$; $-\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx = v_n = -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx$
- (On remarque que : $\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}$)
- 0.25 c) Montrer que la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

FIN