



|        |   |       |  |
|--------|---|-------|--|
| الصفحة | 2 | RS 25 | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع<br>- مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية) |
| 4      |   |       |  |

0.5 3-a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que :  $9^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$

0.5 b) En déduire que :  $q = 5$

### EXERCICE2 : (3.5 points/au choix)

**Si tu choisis de traiter EXERCICE2 il ne faut pas traiter EXERCICE1**

On note  $M_3(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

On rappelle que  $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$  est un espace vectoriel réel de dimension 9 et que  $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$

est un anneau non commutatif unitaire de zéro  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et d'unité  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère le sous-ensemble :  $E = \left\{ M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

#### Première partie :

0.25 1- a) Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$

0.5 b) Déterminer une base de  $(E, +, \times)$

0.25 2- a) Vérifier que :

$$"(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 ; M(x, y, z) \cdot M(x', y', z') = M(xx' - yy', xy' + yx', zz')$$

0.5 b) Montrer que  $(E, +, \cdot)$  est un anneau commutatif

#### Deuxième partie :

On considère le sous-ensemble  $F$  de  $E$  des matrices de la forme  $M(x, y, 0)$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

0.25 1- Montrer que  $F$  est un sous-groupe du groupe  $(E, +)$

2- On note  $j$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  vers  $E$  définie par :

$$"(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; j(x + iy) = M(x, y, 0)$$

0.25 a) Montrer que  $j$  est un homomorphisme de  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  vers  $(E, +, \cdot)$

0.5 b) En déduire que  $(F, +, \cdot)$  est un groupe commutatif. ( $F^*$  désigne  $F - \{O\}$ )

0.5 c) Montrer que  $(F, +, \cdot)$  est un corps commutatif dont on précisera l'unité.

0.25 3- a) Vérifier que :  $(M(x, y, 0) \in F) ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M(x, y, 0) = O$

0.25 b) En déduire qu'aucun des éléments du sous-ensemble  $F$  n'admet un inverse pour la multiplication dans  $M_3(\mathbb{R})$

|        |       |  |
|--------|-------|--|
| الصفحة | RS 25 | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع<br>- مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية) |
| 3      |       |  |
| 4      |       |  |

### EXERCICE3 :(3.5 points/obligatoire)

I- Soit  $m$  un nombre réel non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ , les deux équations :

$$(E): z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0 \quad \text{et} \quad (F): z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2) = 0$$

- 0.5 1- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E)
- 0.25 2- a) Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
- 0.5 b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (F)

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; u, v)$

On considère les deux points :  $A(-1+im)$  et  $B(-1-im)$

Soient  $W$  le milieu du segment  $[AB]$ ,  $A'$  le milieu du segment  $[OB]$  et  $B'$  le milieu du segment  $[OA]$

La rotation de centre  $W$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  transforme  $A$  en  $P(p)$ , La rotation de centre  $A'$  et

d'angle  $\frac{\pi}{2}$  transforme  $B$  en  $Q(q)$  et La rotation de centre  $B'$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

transforme  $O$  en  $R(r)$

- 1.5 1- Montrer que :  $p = -1 + m$ ,  $q = \frac{1-i}{2}(-1-im)$  et  $r = \bar{q}$
- 0.25 2- a) Vérifier que :  $q - r = -ip$
- 0.5 b) En déduire que :  $OP = QR$  et que les deux droites  $(OP)$  et  $(QR)$  sont orthogonales.

### EXERCICE4 : (13 points/obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I = [0,1]$  par  $f(x) = x \ln(2-x)$

et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; i, j)$ .

- 0.75 1-a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $I$  et que : " $x \in I$  ;  $f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$ "
- 0.5 b) Montrer que la fonction dérivée  $f'$  est strictement décroissante sur  $I$
- 0.75 c) Montrer qu'il existe un unique réel  $a \in ]0,1[$  tel que :  $f'(a) = 0$  et que  $f(a) = \frac{a^2}{2-a}$
- 0.75 2-a) Etudier les variations de  $f$ , puis donner son tableau de variations.
- 0.5 b) Montrer que la courbe  $(C)$  est concave.
- 0.5 c) Montrer que : (" $t \in I$ ), (" $x \in I$ );  $f(x) \leq f'(t)(x-t) + f(t)$ "

|        |   |       |  |
|--------|---|-------|--|
| الصفحة | 4 | RS 25 | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع<br>- مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية) |
| 4      |   |       |  |

- 0.5 d) En déduire que :  $(\forall x \in I); f(x) \leq x \ln 2$  et  $f(x) \leq -x + 1$
- 0.5 3- Représenter la courbe (C) (On prendra :  $\|i\| = 2cm$ )
- 0.75 4- Calculer, en  $cm^2$ , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives :  $x = 0$ ,  $x = 1$  et  $y = 0$

### Deuxième partie :

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $I = [0,1]$  par :  $f_n(x) = x^n \ln(2-x)$

- 0.5 1-a) Vérifier que  $f_n$  est positive sur  $I$  et que  $f_n(0) = f_n(1)$

- 0.5 b) Montrer qu'il existe au moins  $a_n \in ]0,1[$  tel que :  $f'_n(a_n) = 0$

2- a) Montrer que  $f_n$  est dérivable sur  $I$  et que :  $(\forall x \in I); f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$  où :

0.75 
$$g_n(x) = n \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$$

- 0.5 b) Montrer que la fonction  $g_n$  est strictement décroissante sur  $I$

- 0.5 c) En déduire que  $a_n$  est unique.

3- On considère la suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  ainsi définie.

- 1 a) Montrer que :  $(\forall n \geq 2); f_n(a_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_n^{n+1}}{2-a_n}$ , en déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a_n) = 0$

- 1 b) Montrer que :  $(\forall n \geq 2); g_n(a_{n+1}) = -\ln(2-a_{n+1})$ , en déduire que la suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  est strictement croissante.

- 0.25 c) Montrer que la suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  est convergente.

- 0.5 d) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

### Troisième partie :

Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

- 0.75 1- Montrer que la suite  $(I_n)_{n \geq 2}$  est décroissante en déduire qu'elle est convergente.

- 0.5 2- En utilisant une intégration par parties, montrer que :  $I_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x} dx$

- 0.75 3- Montrer que :  $(\forall n \geq 2); 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ , en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$