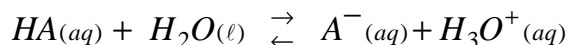


- Chimie -1- Etude d'une solution aqueuse d'un acide HA :1-1- Equation chimique de la réaction :1-2- \* Taux d'avancement final  $\tau$  :

$$\tau = \frac{x_f}{x_m} = \frac{[H_3O^+]}{C} \Rightarrow \tau = \frac{10^{-pH}}{C}$$

$$\text{- A.N : } \tau = \frac{10^{-3,44}}{10^{-2}} \approx 0,0363 = 3,63\%$$

\* Espèce chimique prédominante :

$$\tau = \frac{[A^-]}{C} = \frac{[A^-]}{[AH] + [A^-]} \Rightarrow \frac{[AH] + [A^-]}{[A^-]} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{[AH]}{[A^-]} + 1 = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{[AH]}{[A^-]} = \frac{1 - \tau}{\tau}$$

$$\text{- A.N : } \frac{[AH]}{[A^-]} = \frac{1 - 0,0363}{0,0363} \approx 26,5 \text{ c.à.d } [AH] \gg [A^-] \Rightarrow AH \text{ est l'espèce prédominante.}$$

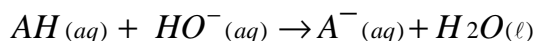
1-3- \* Expression de  $pK_A$  :

$$\text{- } pK_A = -\text{Log}(K_A) = -\text{Log}\left(\frac{[H_3O^+] \times [A^-]}{[AH]}\right) \quad (1)$$

$$\text{- } [H_3O^+] = [A^-] = 10^{-pH} \quad (2) \text{ et } [AH] = C - [H_3O^+] = C - 10^{-pH} \quad (3)$$

$$\text{- On remplace (2) et (3) dans (1), on aura : } pK_A = -\text{Log}\left(\frac{10^{-2 \cdot pH}}{C - 10^{-pH}}\right)$$

$$\text{* Valeur de } pK_A \text{ : } pK_A = -\text{Log}\left(\frac{10^{-2 \times 3,44}}{10^{-2} - 10^{-3,44}}\right) \approx 4,86$$

1-4-1- Equation chimique de la réaction :1-4-2- Valeur de  $V_B$  pour lequel  $pH = 5,50$  :

- Dressons le tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$AH(aq) + HO^-(aq) \rightarrow A^-(aq) + H_2O(l)$			
Etat du système	Avancement $x(\text{mol})$	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	$C.V_A$	$C.V_B$	0	en excès
Etat final	$x_{\max}$	$C.V_A - x_{\max}$	$C.V_B - x_{\max}$	$x_{\max}$	en excès

- Pour  $V_B < V_{BE} = 20\text{mL}$  : le réactif limitant est l'espèce  $HO^-$  ; donc :

$$C.V_B - x_{\max} = 0 \text{ ou } x_{\max} = C.V_B$$

- On sait que :  $pH = pK_A + \text{Log}\left(\frac{[A^-]}{[AH]}\right) \Rightarrow \frac{[A^-]}{[AH]} = 10^{pH - pK_A}$  (1)

- D'autre part :  $\frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{x_{\max}}{C.V_A - x_{\max}} \Rightarrow \frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{C.V_B}{C.V_A - C.V_B} \Rightarrow \frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{V_B}{V_A - V_B}$  (2)

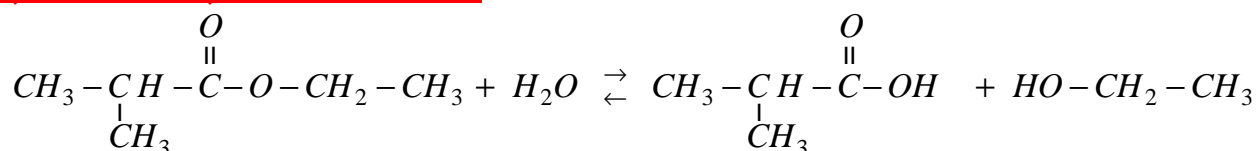
- Les deux relations (1) et (2) conduisent à écrire :

$$\frac{V_B}{V_A - V_B} = 10^{pH - pK_A} \Rightarrow V_B = V_A \cdot \frac{10^{pH - pK_A}}{1 + 10^{pH - pK_A}}$$

- **A.N :**  $V_B = 20 \times \frac{10^{5,50 - 4,86}}{1 + 10^{5,50 - 4,86}} \approx 16,3 \text{ mL}$

## 2- Hydrolyse d'un ester :

### 2-1- Equation chimique de la réaction :



### 2-2- Temps de demi-réaction de la transformation (1) :

Equation de la réaction		$\text{Ester} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{Acide} + \text{Alcool}$			
Etat du système	Avancement x(mol)	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	$n_0(E)$	$n_0(E)$	0	0
Etat intermédiaire $t = t_{1/2}$	$X(t_{1/2})$	$n_0(E) - x(t_{1/2})$	$n_0(E) - x(t_{1/2})$	$x(t_{1/2})$	$x(t_{1/2})$
Etat final	$X_f$	$n_0(E) - x_f$	$n_0(E) - x_f$	$x_f$	$x_f$

- Cherchons la quantité de matière restante  $n_{t_{1/2}}(E)$  de l'ester E à l'instant  $t_{1/2}$  :

- On a d'après le tableau :  $n_{t_{1/2}}(E) = n_0(E) - x(t_{1/2})$  avec  $x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$  et  $n_f(E) = n_0(E) - x_f$

- Donc on peut écrire :  $n_{t_{1/2}}(E) = n_0(E) - \frac{x_f}{2} \Rightarrow n_{t_{1/2}}(E) = n_0(E) - \frac{n_0(E) - n_f(E)}{2}$

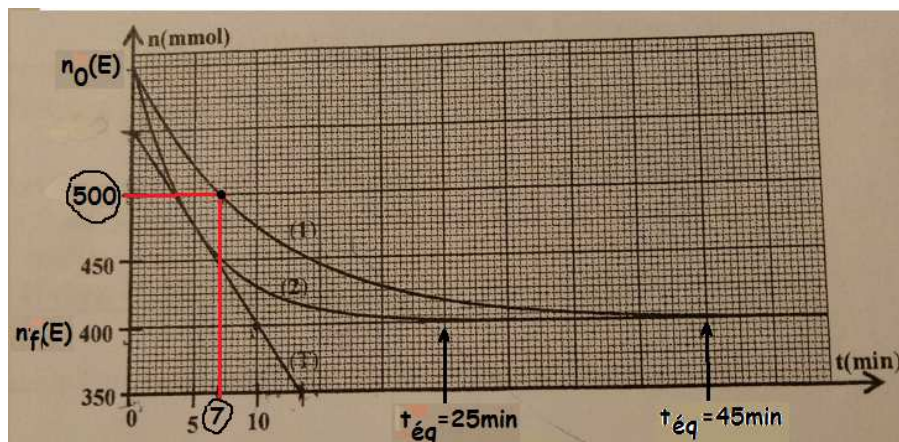
$$n_{t_{1/2}}(E) = \frac{n_0(E) + n_f(E)}{2}$$

- Graphiquement, on trouve :  $n_0(E) = 600 \text{ mmol}$  et  $n_f(E) = 400 \text{ mmol}$

- **A.N :**  $n_{t_{1/2}}(E) = \frac{600 + 400}{2} = 500 \text{ mmol}$

On repère la quantité 500mmol sur l'axe vertical, et par projection on trouve le temps de demi-réaction :

$$t_{1/2} \approx 7 \text{ min}$$



### 2-3- Courbe correspondant à la réaction sans catalyseur :

La courbe (1) correspond à la réaction d'hydrolyse sans catalyseur, car l'équilibre est atteint après écoulement de 45min, contrairement à l'écoulement uniquement de 25min pour atteindre l'équilibre en utilisant un catalyseur correspondant à la courbe (2).

### 2-4- Vitesse volumique de réaction à $t_1 = 5 \text{ min}$ :

- Par définition :  $v(t) = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{dx(t)}{dt}$  avec  $x(t) = n_0(E) - n_t(E)$

- L'expression devient :  $v(t) = -\frac{1}{V_0} \cdot \frac{dn_t(E)}{dt}$

- A  $t_1 = 5 \text{ min}$  :  $v(5 \text{ min}) \approx -\frac{1}{V_0} \cdot \frac{\Delta n_t(E)}{\Delta t} = -\frac{1}{71 \cdot 10^{-3}} \times \frac{(550 - 400) \cdot 10^{-3}}{0 - 10}$

$$v(5 \text{ min}) \approx 0,21 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

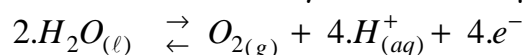
### 3- Electrolyse de l'eau :

#### 3-1- Les affirmations exactes :

- L'anode est liée à la borne positive du générateur ;
- Une transformation forcée s'effectue dans le sens inverse d'une transformation spontanée.
- Le courant électrique sort par la cathode de l'électrolyseur.

#### 3-2- Equation de la réaction à l'anode :

A l'anode, il se produit une réaction d'oxydation de l'espèce  $\text{H}_2\text{O}$  :

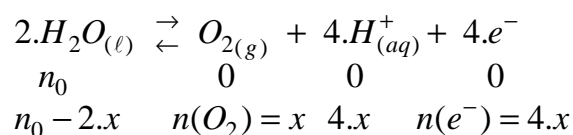


#### 3-3- \* Expression du volume de $\text{O}_2$ formé à l'instant $t$ :

- En se basant sur le tableau d'avancement, on trouve :

$$n(e^-) = 4 \cdot x = 4 \cdot n(\text{O}_2) = 4 \cdot \frac{V}{V_m} \text{ et } n(e^-) = \frac{I \times \Delta t}{N_A \times e}$$

$$\text{donc } V = \frac{I \cdot \Delta t}{4 \cdot N_A \cdot e} \cdot V_m$$



$$- \text{A.N : } V = \frac{0,2 \times 8 \times 60}{4 \times 6,02 \cdot 10^{23} \times 1,6 \cdot 10^{-19}} \times 24 \approx 5,6 \cdot 10^{-3} L = 5,6 mL$$

### - Physique -

#### Exercice 1 : Transformations nucléaires

##### 1- Radioactivité $\alpha$ du radium ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ :

###### 1-1- Définition :

L'énergie de liaison d'un noyau atomique est l'énergie qu'il faut fournir au noyau pour le dissocier en ses nucléons,

###### 1-2- La proposition juste :

c) Après une durée égale à  $3.t_{1/2}$  ; il reste 12,5% ( $= \frac{100}{2^3}$  %) des noyaux initiaux.

(On applique la relation :  $N(n.t_{1/2}) = \frac{1}{2^n} \times N_0$ )

###### 1-3- Montrons que $1\text{Ci} \approx 3,73 \cdot 10^{10} \text{Bq}$ :

- La curie 1Ci est l'activité de 1g de radium 226 ;

$$- 1\text{Ci} = A(m=1\text{g}) \Rightarrow 1\text{Ci} = \lambda \cdot N(m=1\text{g}) \Rightarrow 1\text{Ci} = \lambda \cdot \frac{m(=1\text{g})}{m_{\text{noy}}} \Rightarrow 1\text{Ci} = \lambda \cdot \frac{m(=1\text{g})}{M} \cdot N_A$$

$$- \text{A.N : } 1\text{Ci} = 1,4 \cdot 10^{-11} \times \frac{1}{226} \times 6,02 \cdot 10^{23} \approx 3,73 \cdot 10^{10} \text{Bq}$$

###### 1-4- L'activité d'un échantillon en Juin 2018 :

- En Juin 1898 :  $A(t_0 = 0) = 1\text{Ci} = 3,73 \cdot 10^{10} \text{Bq}$

- En Juin 2018 :  $A(t) = A(t_0 = 0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$  avec  $t = \Delta t = 2018 - 1898 = 120 \text{ans}$

$$- \text{A.N : } A(t) = 3,73 \cdot 10^{10} \times e^{-(1,4 \cdot 10^{-11} \times 120 \times 365,25 \times 24 \times 3600)} \approx 3,54 \cdot 10^{10} \text{Bq}$$

###### 1-5- Calcul de l'énergie produite par la désintégration d'un noyau du radium 226 :

- L'équation de désintégration est :  ${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^4_2\text{He}$

- L'énergie libérée est :  $E_{\text{lib}} = |\Delta E| = \left| E_{\ell}({}^{226}_{88}\text{Ra}) - E_{\ell}({}^4_2\text{He}) - E_{\ell}({}^{222}_{86}\text{Rn}) \right|$

$$- \text{A.N : } E_{\text{lib}} = \left| 1,7311 \cdot 10^3 - 28,4 - 1,7074 \cdot 10^3 \right| \approx 4,7 \text{MeV}$$

##### 2- Mouvement de $\alpha$ dans un champ magnétique uniforme :

###### 2-1- Nature du mouvement de la particule $\alpha$ :

\* Expression de l'accélération :

La particule  $\alpha$  est soumise uniquement à la force de Lorentz :  $\vec{F} = 2e \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$

Par application de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton dans un référentiel galiléen :  $m(\alpha) \cdot \vec{a} = 2e \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$

On en déduit :  $\vec{a} = \frac{2e}{m(\alpha)} \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$  ; cette relation montre que le vecteur accélération est

perpendiculaire au vecteur vitesse  $\vec{v}$ .

\* Energie cinétique de la particule  $\alpha$  :

On a :  $\frac{dE_c}{dt} = \underbrace{P}_{\text{puissance}} (\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$  car  $\vec{F}$  est perpendiculaire à  $\vec{v}$

Cela prouve que l'énergie cinétique de la particule est constante, et par suite le mouvement est **uniforme**.

\* Le mouvement de  $\alpha$  est plan :

Posons  $\vec{B} = B\vec{k}$  alors  $\vec{a} = \frac{2eB}{m(\alpha)} \cdot \vec{v} \wedge \vec{k}$  ce qui montre que

la composante  $a_z$  de l'accélération est nulle  $a_z = 0$

et par intégration et application des conditions initiales on en déduit que  $z = 0$

Donc le mouvement de  $\alpha$  se fait dans le plan  $(\pi)$ .

\* Le mouvement de  $\alpha$  est circulaire :

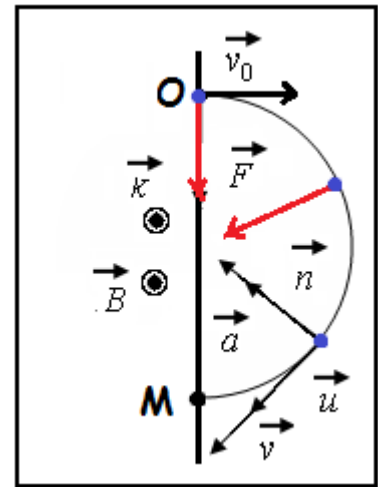
Dans le repère de Fresnet  $M(\vec{u}, \vec{n})$  ; la composante tangentielle de l'accélération est nulle :

$a = a_n$  avec  $a = \frac{2eB}{m(\alpha)} v_0$  et  $a_n = \frac{v_0^2}{\rho}$   $\rho$  est le rayon de courbure

On écrit alors :  $a = \frac{2eB}{m(\alpha)} v_0 = \frac{v_0^2}{\rho}$  ou bien :  $\rho = \frac{m(\alpha) \cdot v_0}{2eB} = Cte$

Donc le mouvement est **circulaire** et **uniforme**, et le rayon est :  $OM = R = \frac{m(\alpha) \cdot v_0}{2eB}$

- A.N :  $OM = \frac{6,6447 \cdot 10^{-27} \times 1,5 \cdot 10^7}{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,5} \approx 0,207m = 20,7cm$



## Exercice 2 : Electricité

I- Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension :

1- Equation différentielle vérifiée par la tension  $u_c$  :

D'après la figure1 :  $u_R + u_C = E$  (1)

En respectant les conventions :  $u_R = R \cdot i = R \cdot \frac{dq}{dt} = RC \cdot \frac{du_C}{dt}$

La relation (1) devient :  $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$  ou bien  $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$

**2- \* Détermination de  $E$  :**

- L'équation de la fonction  $\frac{du_C}{dt} = f(u_C)$  est de la forme :  $\frac{du_C}{dt} = A.u_C + B$

- L'équation différentielle peut s'écrire :  $\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC} u_C + \frac{E}{RC}$

- Lorsque  $\frac{du_C}{dt} = 0$  alors  $E = u_C$  et graphiquement (figure2) on trouve  $\underline{E = 6V}$

**\* Vérification de  $C = 10 \text{ nF}$  :**

- On pose  $A = -\frac{1}{RC}$  : le coefficient directeur de la droite

$$\text{Alors } C = -\frac{1}{R \times A} = -\frac{1}{2.10^3 \times \frac{6 \times 5.10^4 - 0}{0 - 6}} \Rightarrow C = 10^{-8} \text{ F} = 10 \text{ nF}$$

**3- Détermination de la valeur du rendement  $\rho$  :**

- Par définition :  $\rho = \frac{E_e}{E_g}$

- En régime permanent  $u_C(\infty) = E$  alors  $E_e = \frac{1}{2} . C . u_C^2 = \frac{1}{2} . C . E^2$  et  $E_g = C . E^2$

- Donc :  $\rho = \frac{E_e}{E_g} = \frac{\frac{1}{2} . C . E^2}{C . E^2} \Rightarrow \underline{\rho = 0,50 = 50\%}$

**II - Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension :****1-1- Equation différentielle vérifiée par  $i(t)$  :**

- D'après la loi d'additivité des tensions :  $u_b + u_{R_1} = E$  (1)

- En respectant les conventions :  $u_b = L . \frac{di}{dt} + r . i$  et  $u_{R_1} = R_1 . i$

Alors (1) s'écrit :  $L . \frac{di}{dt} + (r + R_1) . i = E$  ou bien  $\underline{\underline{\frac{di}{dt} + \frac{(r + R_1)}{L} . i = \frac{E}{L}}}$

**1-2- \* Détermination de  $R_1$  :**

- Au régime permanent :  $\underbrace{\left(\frac{di}{dt}\right)}_{=0} + \frac{(r + R_1)}{L} . i_{\max} = \frac{E}{L} \Rightarrow (r + R_1) . i_{\max} = E$

- Finalement :  $R_1 = \frac{E}{i_{\max}} - r$

- **A.N** :  $R_1 = \frac{6}{50.10^{-3}} - 20 = \underline{100\Omega}$

**\* Vérification de  $L = 0,3H$  :**

- La constante de temps du circuit RL :  $\tau = \frac{L}{r + R_1}$
- On en déduit que :  $L = \tau \times (r + R_1)$  avec  $\tau = 2,5ms$  (figure4)
- A.N :  $L = 2,5 \cdot 10^{-3} \times (20 + 100) = 0,3H$

**1-3- Calcul de  $u_b$  au régime permanent :**

- L'équation différentielle donne :  $(u_b)_\infty = E - (u_{R_1})_\infty \Rightarrow (u_b)_\infty = E - R_1 \cdot i_{\max}$
- A.N :  $(u_b)_\infty = 6 - 100 \times 0,05 = 1V$

**2-1- Valeur de  $i$  juste après l'ouverture de l'interrupteur K :**

L'intensité  $i(t)$  est une fonction continue :  $i(t=0) = i_{\max} = 50mA$

**2-2- \* Valeur de  $\frac{di(t)}{dt}$  à  $t=0$  :**

- D'après la loi d'additivité des tensions :  $u_b + u_{R_1} + u_{R_2} = 0$  (1)
- En respectant les conventions :  $u_b = L \cdot \frac{di(t)}{dt} + r \cdot i$   $u_{R_1} = R_1 \cdot i$  et  $u_{R_2} = R_2 \cdot i$

Alors (1) s'écrit :  $L \cdot \frac{di}{dt} + (r + R_1 + R_2) \cdot i = 0$  ou bien  $\left( \frac{di(t)}{dt} \right)_{t=0} = - \frac{(r + R_1 + R_2)}{L} \cdot i_{\max}$

- A.N :  $\left( \frac{di(t)}{dt} \right)_{t=0} = - \frac{(20 + 100 + 2000)}{0,3} \times 50 \cdot 10^{-3} = -3,53 \cdot 10^2 A \cdot s^{-1}$

**\* Calcul de  $u_b$  à l'ouverture de l'interrupteur K :**

- L'expression est :  $u_b(0) = L \cdot \left( \frac{di(t)}{dt} \right)_{t=0} + r \cdot i_{\max}$
- A.N :  $u_b(0) = 0,3 \times (-3,53 \cdot 10^2) + 20 \times 0,05 \approx -105V$

**3- Rôle de la branche :**

C'est pour éviter l'apparition des étincelles aux bornes de l'interrupteur au moment de son ouverture ; qui sont dues à la surtension aux bornes de la bobine :  $u_b(0) \approx -105V$  !!

**III - Oscillateur RLC en régime forcé :****1- Fréquence de résonance  $N_0$  :**

- A la résonance l'impédance Z du circuit RLC est minimale ;
- D'après la figure5 ; on trouve :  $N_0 = 0,5KH$   $Z = 500H$

**2- Capacité  $C_1$  du condensateur :**

- A la résonance ; la relation est vérifiée :  $L \cdot C_1 \cdot (2\pi N_0)^2 = 1$

- On en déduit que :  $C_1 = \frac{1}{4.\pi^2.L.N_0^2}$

- A.N :  $C_1 = \frac{1}{4 \times 10 \times 0,3 \times 500^2} \approx 3,3.10^{-7} F = 0,33 \mu F$

### 3- \* Relation entre $Z$ , $r$ et $R_3$ :

- Pour  $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  on a :  $U = Z.I = Z.\frac{I_0}{\sqrt{2}}$

- A la résonance  $I = I_0$  on a :  $U = Z_0.I_0 = (r + R_3).I_0$

- Des deux relations on trouve :  $Z = (r + R_3).\sqrt{2}$

#### \* Déduction graphique de $\Delta N$ :

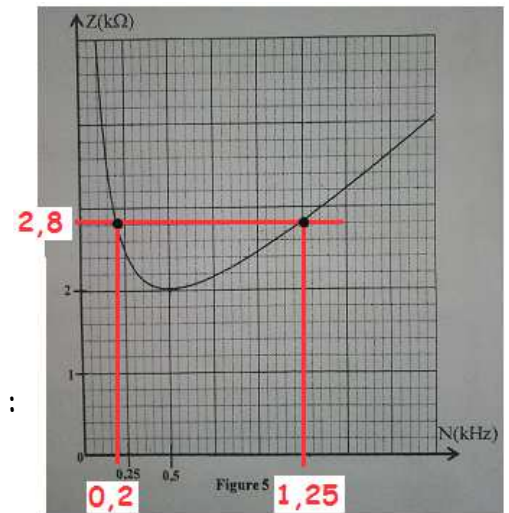
- Calcul de  $Z$  lorsque  $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  :

$$Z = (20 + 1980).\sqrt{2} \approx 2828 \Omega \approx 2,8 K\Omega$$

- En exploitant la courbe de la fonction  $Z = f(N)$  ; on trouve :

$$N_{\min} \approx 0,2 KHz \text{ et } N_{\max} \approx 1,25 KHz$$

$$d'où : \Delta N = N_{\max} - N_{\min} \approx 1,25 - 0,2 = 1,05 KHz$$



## Exercice 3 : Mécanique

### PARTIE I : Etude du mouvement d'un corps solide

#### 1- Etude du mouvement du centre $G$ dans l'air :

##### 1-1- Equation différentielle régissant la vitesse $V_z$ du centre d'inertie $G$ :

- Système à étudier : {Le baigneur (S)}

- Repère d'étude  $R(O; \vec{k})$  supposé galiléen ;

- Bilan des forces extérieures :

Poids du corps seulement car la chute est libre :  $\vec{P}$

- 2<sup>ème</sup> loi de Newton :  $\vec{P} = m.a_G$

- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe  $Oz$  :  $P_z = m.a_z$  (\*)

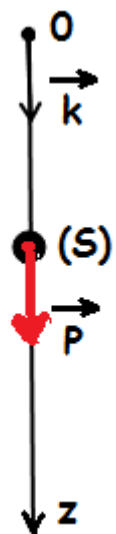
- Expression :  $P_z = P = m.g$  et  $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ .

- La relation (\*) devient :  $m.g = m.\frac{dv_z}{dt}$

- Finalement l'équation différentielle est :  $\frac{dv_z}{dt} = g$  (1)

##### 1-2- \* Temps de chute $t_c$ :

En intégrant l'équation (1) :  $v_z(t) = g.t$  (2) ( $v_z(0) = 0$ )



En intégrant l'équation (2) :  $z(t) = \frac{1}{2} g t^2$  (3) ( $z(0) = 0$ )

Le temps de chute  $t_c$  correspond à :  $z(t_c) = h$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2} g t_c^2 = h \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\text{- A.N : } t_c = \sqrt{\frac{2 \times 10}{10}} \approx 1,4 \text{ s}$$

\* Vitesse  $v_e$  d'entrée dans l'eau :

- La relation (2) donne :  $v_z(t_c) = g t_c$

$$\text{- A.N : } v_e = v_z(t_c) = 10 \times 1,4 = 14 \text{ m.s}^{-1}$$

## 2- Etude du mouvement vertical du centre G dans l'eau :

### 2-1- Equation différentielle régissant la vitesse $v_z$ du centre d'inertie G :

- Système à étudier : {Le baigneur (S)}

- Repère d'étude R ( $O ; \vec{k}$ ) supposé galiléen :

- Bilan des forces extérieures :

$$\text{* Poids du corps : } \vec{P} = m \cdot \vec{g} = mg \cdot \vec{k}$$

$$\text{* Force de frottement fluide : } \vec{f} = -\lambda \cdot \vec{v}_G = -\lambda v_z \cdot \vec{k}$$

$$\text{* Poussée d'Archimède : } \vec{F} = -\frac{m}{d} \cdot \vec{g} = -\frac{m}{d} g \cdot \vec{k}$$

$$\text{- 2}^{\text{ème}} \text{ loi de Newton : } m \cdot \vec{a}_G = \vec{F} + \vec{f} + \vec{P}$$

- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Oz :  $m \cdot a_z = F_z + f_z + P_z$  (\*)

$$\text{- Expressions : } F_z = -\frac{m}{d} \cdot g ; f_z = -\lambda \cdot v_z ; P_z = P = m \cdot g \text{ et } a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

$$\text{- La relation (*) devient : } m \cdot \frac{dv_z}{dt} = \left(-\frac{m}{d} \cdot g\right) + (-\lambda \cdot v_z) + (m \cdot g)$$

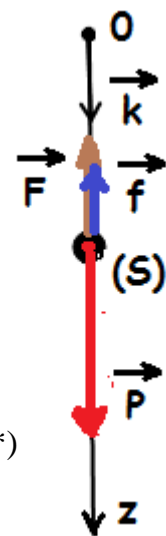
$$\text{- ou bien : } \frac{dv_z}{dt} + \frac{\lambda}{m} \cdot v_z = g \cdot \left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

$$\text{- Finalement l'équation différentielle est : } \frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot v_z = g \cdot \left(1 - \frac{1}{d}\right) \text{ avec } \tau = \frac{m}{\lambda}$$

### 2-2- \* Expression de la vitesse limite $v_{lz}$ :

$$\text{- Au régime permanent : } \frac{dv_z}{dt} = 0 \text{ et } v_z = v_{lz}$$

$$\text{- L'équation différentielle devient : } 0 + \frac{1}{\tau} \cdot v_{lz} = g \cdot \left(1 - \frac{1}{d}\right)$$



- Finalement la vitesse limite est :  $v_{l_z} = \tau \cdot g \cdot \left(1 - \frac{1}{d}\right)$

\* Calcul de la vitesse limite  $V_{l_z}$  :

- A.N :  $v_{l_z} = \frac{80}{250} \times 10 \times \left(1 - \frac{1}{0,9}\right) \approx -0,36 \text{ m.s}^{-1}$

### 2-3- Expressions de A et B :

- La solution de l'équation différentielle est :  $v_z(t) = A + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

- L'équation différentielle peut s'écrire :  $\frac{d}{dt}(A + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{1}{\tau} \cdot (A + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}) = g \cdot \left(1 - \frac{1}{d}\right)$

$$\Rightarrow -\frac{B}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \cdot (A + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}) = g \cdot \left(1 - \frac{1}{d}\right) \Rightarrow \underbrace{-\frac{B}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \cdot B \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}_{=0} + \frac{1}{\tau} \cdot A = g \cdot \left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

$$\Rightarrow A = \tau \cdot g \cdot \left(1 - \frac{1}{d}\right) \text{ ou } A = v_{l_z}$$

-  $v_z(t=0) = A + B \cdot e^0 = A + B$  et  $v_z(t=0) = v_e \Rightarrow B = v_e - v_{l_z}$

### 2-4- Instant de retour $t_r$ :

- C'est l'instant où le baigneur s'arrête pour rebrousser chemin :  $v_z(t_r) = 0$

- On a aussi :  $v_z(t_r) = v_{l_z} + (v_e - v_{l_z}) \cdot e^{-\frac{t_r}{\tau}}$

- Des deux relations on écrit :  $v_{l_z} + (v_e - v_{l_z}) \cdot e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0$

- Finalement on aboutit à l'expression :  $t_r = -\tau \cdot \ln\left(\frac{-v_{l_z}}{v_e - v_{l_z}}\right)$

- A.N :  $t_r = -\frac{80}{250} \cdot \ln\left(\frac{-(-0,36)}{14 - (-0,36)}\right) \approx 1,18 \text{ s}$

## PARTIE II : Etude du mouvement d'un pendule élastique

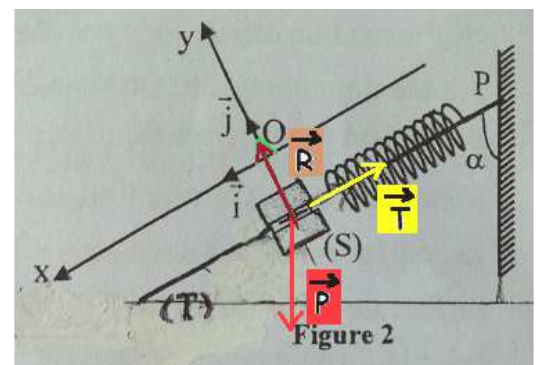
### 1- Expression de la longueur $l_e$ :

A l'équilibre :  $\vec{T}_0 + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ , et par projection sur l'axe Ox incliné vers le bas, on aura :

$$T_{0x} + P_x + R_x = 0,$$

Alors :  $\boxed{-K \cdot \Delta l_{\text{éq}} + m \cdot g \cdot \cos(\alpha) + 0 = 0}$  avec  $\Delta l_{\text{éq}} = l_e - l_0$

$$\text{d'où : } \underline{l_e = l_0 + \frac{m \cdot g \cdot \cos(\alpha)}{K}}$$



**2-1- Equation différentielle vérifiée par l'abscisse  $x(t)$  du centre d'inertie  $G$  :**

- Système à étudier : {solide(S)}

- Repère d'étude  $R(O; \vec{i}; \vec{j})$  supposé galiléen ;

- Bilan des forces extérieures :

\* Poids du solide (S) :  $\vec{P}$

\* Action du ressort :  $\vec{T}$

\* Action du plan incliné :  $\vec{R}$

- La 2<sup>ème</sup> loi de Newton donne :  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$  ;

- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Ox :

$$P_x + T_x + R_x = m \cdot a_x \Rightarrow mg \cos(\alpha) - K(\Delta\ell_{\text{éq}} + x) + 0 = m \cdot \ddot{x} \Rightarrow \underbrace{mg \cos(\alpha) - K \Delta\ell_{\text{éq}}}_{=0} - K \cdot x = m \cdot \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m} \cdot x = 0$$

**2-2- Expression numérique de  $x(t)$  :**

- L'expression de l'abscisse :  $x(t) = x_{\text{max}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$

- D'après la figure 3 :  $x_{\text{max}} = 3 \times 0,5 = 1,5 \text{ cm}$

- L'équation différentielle vérifiée par  $x(t)$  peut s'écrire :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} \cdot x = 0 \text{ ou } \ddot{x} = -\frac{K}{m} \cdot x \text{ ou bien } a_x = -\frac{K}{m} \cdot x$$

- L'équation de la droite (figure 3) :  $a_x = A \cdot x$

- En comparant les deux équations ; on identifie le coefficient directeur :

$$-\frac{K}{m} = A = \frac{\Delta a_x}{\Delta x} = \frac{1,25 - 0}{-0,5 \cdot 10^{-2} - 0} = -250 \text{ s}^{-2}$$

- Or on sait que :  $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{-A}$  **A.N** :  $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{-A} = \sqrt{250} = 15,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \approx 5 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

- D'une part d'après la condition initiale  $x(0) = x_{\text{max}}$

$$\text{D'autre part } x(0) = x_{\text{max}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times 0 + \varphi\right) = x_{\text{max}} \cdot \cos(\varphi)$$

$$\text{D'où } x_{\text{max}} \cdot \cos(\varphi) = x_{\text{max}} \Rightarrow \cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

- Finalement :  $\underset{\text{en m}}{x}(t) = 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(5 \cdot \pi \cdot \underset{\text{en s}}{t})$

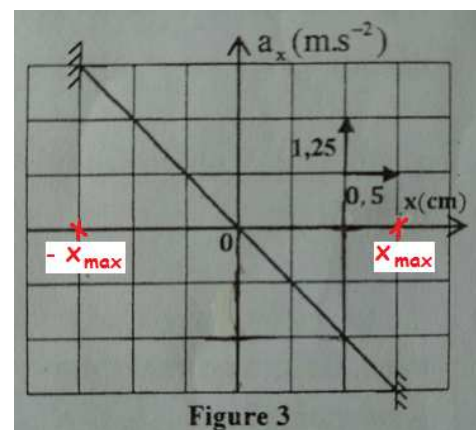


Figure 3

**3-1- Expression de l'énergie potentielle  $E_p$  :**

- L'énergie potentielle totale est :  $E_p = E_{pp} + E_{pe}$  (\*)

- L'énergie potentielle de pesanteur est :  $E_{pp} = m.g.z + C$  ; l'axe Oz est orienté vers le haut.

Or à  $z=0$  on a  $E_{pp}=0$  donc  $C=0$  ; d'où  $E_{pp} = -m.g.z$  avec  $z = -x.\cos(\alpha)$

Donc 
$$E_{pp} = -m.g.x.\cos(\alpha) \quad (1)$$

- L'énergie potentielle élastique est :  $E_{pe} = \frac{1}{2}.K.\Delta\ell^2 + C'$  avec  $\Delta\ell = x + \Delta\ell_{\text{éq}}$

Or lorsque  $\Delta\ell = \Delta\ell_{\text{éq}}$  on a  $E_{pe}=0$  donc  $C' = -\frac{1}{2}.K.\Delta\ell_{\text{éq}}^2$  ;

d'où  $E_{pe} = \frac{1}{2}.K.(x + \Delta\ell_{\text{éq}})^2 - \frac{1}{2}.K.\Delta\ell_{\text{éq}}^2$

En développant cette expression on aura :  $E_{pe} = \frac{1}{2}.Kx^2 + K.x.\Delta\ell_{\text{éq}} + \frac{1}{2}.K.\Delta\ell_{\text{éq}}^2 - \frac{1}{2}.K.\Delta\ell_{\text{éq}}^2$

Donc : 
$$E_{pe} = \frac{1}{2}.Kx^2 + K.x.\Delta\ell_{\text{éq}} \quad (2)$$

- On porte (1) et (2) dans (\*), on aura :  $E_p = -mg.x.\cos(\alpha) + Kx\Delta\ell_{\text{éq}} + \frac{1}{2}.K.x^2$

On peut simplifier cette expression :  $E_p = \underbrace{(-mg.\cos(\alpha) + K\Delta\ell_{\text{éq}})}_{=0 \text{ à l'équilibre}}.x + \frac{1}{2}.K.x^2$

Finalement on aboutit à l'expression finale : 
$$E_p = \frac{1}{2} K.x^2$$

**3-2- \* Valeur de la raideur  $K$  :**

- L'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement de  $G$  :  $E_m = E_c + E_p = Cte$

- Lorsque  $x = x_{\text{max}}$  :

$$E_c(x_{\text{max}}) = 0 \Rightarrow E_m(x_{\text{max}}) = E_p(x_{\text{max}}) = \frac{1}{2} K.x_{\text{max}}^2$$

- Lorsque  $x = 0$  :

$$E_m(0) = E_c(0) + \underbrace{E_p(0)}_{=0}$$

$$\Rightarrow E_m(0) = E_c(0) = 9mJ = 9.10^{-3} J \text{ (voir figure4)}$$

$$E_m(x_{\text{max}}) = E_m(0) \Rightarrow \frac{1}{2} K.x_{\text{max}}^2 = 9.10^{-3}$$

$$\Rightarrow K = \frac{2 \times 9.10^{-3}}{(1,5.10^{-2})^2} = 80 N.m^{-1}$$

**\* Valeur de la masse  $m$  :**

$$\text{On a trouvé que : } \frac{K}{m} = 250 s^{-2} \Rightarrow m = \frac{K}{250} = \frac{80}{250} = 0,32 Kg = 320 g$$

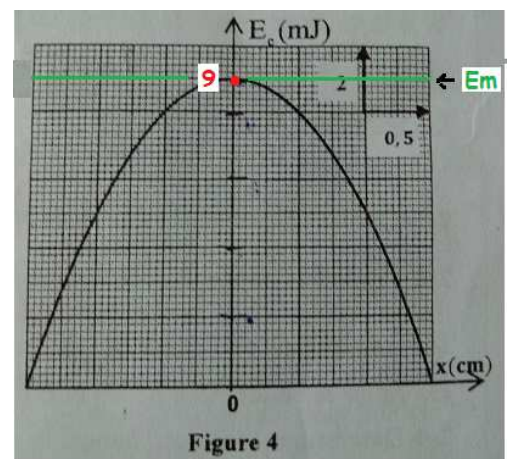


Figure 4