Correction de l'examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2020 ''science math (A) et (B)''

Exercice 1 : Chimie (6,5 points)

Partie I : Pile diiode-zinc

1-Le sens d'évolution spontanée du système :

$$I_{2(aq)} + Zn_{(s)} \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftarrows}} 2I^-_{(aq)} + Zn^{2+}_{(aq)}$$

Le quotient $Q_{r,i}$ de réaction dans l'état initial :

$$\boxed{Q_{r,i} = \frac{[I^-]_i^2.[Zn^{2+}]_i}{[I_2]_i}} \Rightarrow Q_{r,i} = \frac{(5{,}0.10^{-2})^2 \times 0{,}10}{0{,}1} \Rightarrow \boxed{Q_{r,i} = 2{,}5.10^{-3}}$$

$$Q_{r,i} < K = 10^{46}$$

Selon le critère d'évolution d'un système chimique, le système évolue spontanément dans le sens direct (1), sens de formation de I^- et Zn^{2+}.

2- L'équation de la réaction qui se produit au niveau de la cathode :

Au niveau de la cathode se produit la réduction de I_2 :

$$I_{2(aq)} + 2e^- \rightleftarrows 2I^-_{(aq)}$$

3- Montrons que $n_e(I_2) = 7\ \text{mmol}$:

L'équation de la réaction de dosage :

$$I_{2\ (aq)} + 2S_2O_3^{2-}{}_{(aq)} \longrightarrow 2I^-_{(aq)} + S_4O_6^{2-}{}_{(aq)}$$

La relation d'équivalence :

$$\frac{C_r.V_E}{2} = n_R(I_2) \quad \Leftrightarrow n_{versé}(S_2O_3^{2-}) = n_R(I_2)$$

$$\underbrace{n_0(I_2)}_{\text{initial}} = \underbrace{n_R(I_2)}_{\text{restant}} + \underbrace{n_C(I_2)}_{\text{consommé}} \quad \Rightarrow n_C(I_2) = n_0(I_2) - n_R(I_2)$$

$$\boxed{n_C(I_2) = C_1.V - \frac{C_r.V_E}{2}}$$

A.N : $n_C(I_2) = 0{,}10 \times 100.10^{-3} - \frac{0{,}30 \times 20.10^{-3}}{2} = 7.10^{-3}\text{mol} \Rightarrow \boxed{n_e(I_2) = 7\ \text{mmol}}$

4- expression de Δt en fonction I_0 ; F et $n_C(I_2)$:

Tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$I_{2(aq)} + Zn_{(s)} \rightleftarrows 2I^-_{(aq)} + Zn^{2+}_{(aq)}$					Quantité de matière d'é
Etat du système	Avancement	Quantité de matière en (mol)					
initial	0	$C_1.V$	En excès	-	$C_2.V$	$C_0.V$	$n(e^-) = 0$
pendant la durée Δt	x	$C_1.V - x$	En excès	-	$C_2.V + 2x$	$C_0.V + x$	$n(e^-) = 2x$

D'après le tableau d'avancement

$$\begin{cases} n(e^-) = 2x \\ n_C(I_2) = x \end{cases} \Longrightarrow n(e^-) = 2n_C(I_2)$$

$$\begin{cases} Q = I_0.\Delta t \\ Q = F.n(e^-) \end{cases} \Longrightarrow F.n(e^-) = I_0.\Delta t \Longrightarrow \Delta t = \frac{F.n(e^-)}{I_0} \Longrightarrow \boxed{\Delta t = \frac{2F.n_C(I_2)}{I_0}}$$

A.N : $\Delta t = \frac{2\times 9{,}65.10^4 \times 7.10^{-3}}{70.10^{-3}} \Longrightarrow \boxed{\Delta t = 1{,}93.10^4\ s}$

5- Calcul de $[Zn^{2+}]$:

D'après le tableau d'avancement :

$$[Zn^{2+}] = \frac{C_0.V + x}{V} = C_0 + \frac{x}{V}$$

$$n(e^-) = 2n_C(I_2) \Longrightarrow 2x = 2n_C(I_2) \Longrightarrow x = n_C(I_2)$$

$$\boxed{[Zn^{2+}] = C_0 + \frac{n_C(I_2)}{V}}$$

A.N : $[Zn^{2+}] = 0{,}1 + \frac{7.10^{-3}}{100.10^{-3}} \Longrightarrow \boxed{[Zn^{2+}] = 0{,}17\ mol.L^{-1}}$

Partie II : Réaction acido-basiques

1- L'équation modélisant la réaction du dosage :

$$\mathbf{C_nH_{2n+1}COOH_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \longrightarrow C_nH_{2n+1}COO^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}}$$

2- Détermination de C_A :

La relation d'équivalence : $C_A.V_A = C_B.V_{BE} \Longrightarrow \boxed{C_A = \frac{C_B.V_{BE}}{V_A}}$

AN : $C_A = \frac{0{,}10\times 10{,}0}{10{,}0} \Longrightarrow \boxed{C_A = 0{,}10\ mol.L^{-1}}$

-Déduction de la formule chimique de l'acide :

$$M(C_nH_{2n+1}COOH) = 12n + (2n+1)\times 1 + 12 + 16\times 2 + 1 = 14n + 46$$

$$C_A = \frac{m}{M.V} \Longrightarrow M = \frac{m}{C_A.V} \Longrightarrow 14n + 46 = \frac{m}{C_A.V} \Longrightarrow \boxed{n = \frac{m}{14C_A.V} - \frac{46}{14}} \Longrightarrow$$

$$n = \frac{2,3}{14 \times 0,10 \times 0,1} - \frac{46}{14} = 0$$

La formule chimique de l'acide $HCOOH$.

3-1- Détermination de τ :

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}}$$

Tableau d'avancement :

Equation de la réaction	$HCOOH_{(aq)}$	$+ \; H_2O_{(l)}$	$\rightleftarrows$	$HCOO^-_{(aq)}$	$+ \; H_3O^+_{(aq)}$
Etat initial	$C_A.V$	En excès	–	0	0
Etat d'équilibre	$C_A.V - x_{éq}$	En excès	–	$x_{éq}$	$x_{éq}$

D'après le tableau d'avancement :

$$x_{éq} = [H_3O^+]_{éq}.V = 10^{-pH}.V \text{ و } x_{max} = C_A.V$$

$$\tau = \frac{10^{-pH}.V}{C_A.V} \Longrightarrow \boxed{\tau = \frac{10^{-pH}}{C_A}}$$

AN : $\tau = \frac{10^{-2,38}}{0,10} = 0,042 < 1 \Longrightarrow \boxed{\tau = 4,2\ \%}$

On déduit que la réaction est limitée.

3-2- La valeur du rapport $\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}}$:

D'après le tableau d'avancement : $[H_3O^+]_{éq} = [HCOO^-]_{éq} = \frac{x_{éq}}{V} = 10^{-pH}$

$$[HCOO^-]_{éq} = \frac{C_A.V - x_{éq}}{V} = C_A - \frac{x_{éq}}{V} = C_A - 10^{-pH}$$

$$\boxed{\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} = \frac{10^{-pH}}{C_A - 10^{-pH}}} \Longrightarrow \frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} = \frac{10^{-2,38}}{0,10 - 10^{-2,38}} \Longrightarrow \boxed{\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} = 4,4.10^{-2}}$$

3-3- La vérification de la valeur du pK_A :

$$pH = pK_{A1} + \log\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} \Longrightarrow \boxed{pK_{A1} = pH - \log\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}}}$$

A.N : $pK_{A1} = 2,38 - \log(4,2.10^{-2}) \Longrightarrow \boxed{pK_{A1} = 3,74}$

4- Expression du pH en fonction de pK_{A1} et pK_{A2} :

Pour le couple $HCOOH/HCOO^-$: $pH = pK_{A1} + \log\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}}$

Pour le couple $CH_3COOH/\ CH_3COO^-$: $pH = pK_{A2} + \log\frac{[CH_3COO^-]_{éq}}{[CH_3COOH]_{éq}}$

Le tableau de variation de la réaction de $HCOOH$ et CH_3COO^- :

Equation de la réaction	$HCOOH_{(aq)}$	$+ CH_3COO^-_{(aq)}$	$\rightleftarrows$	$HCOO^-_{(aq)}$	$+ CH_3COO^-_{(aq)}$
Etat initial	$C_1.V_1$	$C_1.V_1$	--	0	0
Etat d'équilibre	$C_1.V_1 - x_{éq}$	$C_1.V_1 - x_{éq}$	--	$x_{éq}$	$x_{éq}$

$$[HCOOH]_{éq} = [CH_3COO^-]_{éq} = \frac{C_1.V_1 - x_{éq}}{V} \ ; \ [HCOO^-]_{éq} = [CH_3COOH]_{éq} = \frac{x_{éq}}{V}$$

$$pH = pK_{A1} + \log\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} \Longrightarrow \log\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} = pH - pK_{A1}$$

$$pH = pK_{A2} + \log\frac{[HCOOH]_{éq}}{[HCOO^-]_{éq}} = pK_{A2} - \log\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}}$$

$$pH = pK_{A2} - (pH - pK_{A1}) \Longrightarrow 2pH = pK_{A1} + pK_{A2} \Longrightarrow \boxed{pH = \frac{pK_{A1} + pK_{A2}}{2}}$$

- Déduction de la valeur du pK_{A2} :

$$pH = \frac{pK_{A1} + pK_{A2}}{2} \Longrightarrow pK_{A1} + pK_{A2} = 2pH \Longrightarrow \boxed{pK_{A2} = 2pH - pK_{A1}}$$

$$pK_{A2} = 2 \times 4{,}25 - 3{,}74 \Longrightarrow \boxed{pK_{A2} = 4{,}76}$$

Exercice 2 : Ondes (2,5 points)- Transformation nucléaires (2,25 points)

I- Propagation des ondes mécaniques et des ondes électromécaniques

1-Le nombre d'affirmations justes : 1

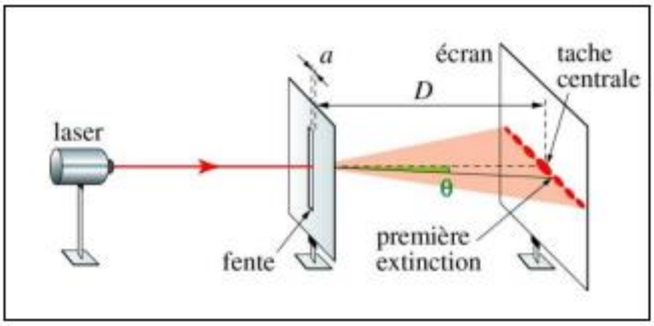
2-1- L'affirmation juste est ;

Lors de la diffraction d'une onde mécanique progressive périodique, sa fréquence ne change pas.

2-2- Le son émis par un haut-parleur est une onde :

Mécanique longitudinale.

3-1- le schéma du montage de diffraction :

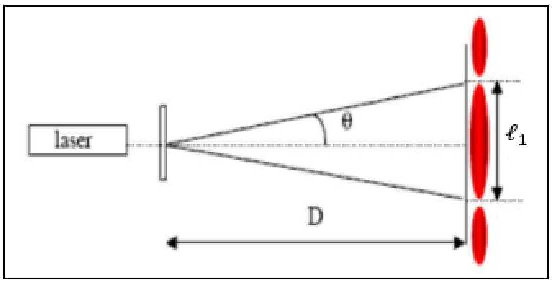


Voir schéma ci-contre :

3-2- La valeur de a :

D'après la figure on a : $\tan\theta = \frac{\ell_1}{2D}$

$$\tan\theta \approx \theta \implies \theta = \frac{\ell_1}{2D}$$



On a : $\theta = \frac{\lambda_1}{a}$

$$\frac{\ell_1}{2D} = \frac{\lambda_1}{a}$$

$$c = \lambda_1 . f_1 \implies \lambda_1 = \frac{c}{f_1}$$

$$\boxed{a = \frac{2D.c}{\ell_1 . f_1}}$$

A.N : $a = \frac{2\times 1{,}6\times 3.10^8}{8.10^{-2}\times 4{,}76.10^{14}} = 2{,}52.10^{-5}\mathrm{m} \implies \boxed{a = 25{,}2\ \mu\mathrm{m}}$

3-3-comment varie la largeur de la tache centrale ?

D'après la relation $\frac{\ell}{2D} = \frac{\lambda}{a} \implies \ell = \frac{2\lambda D}{a}$ puisque $D = cte$ et $a = cte$, plus que la valeur de λ augmente plus que la largeur ℓ de la fente centrale augmente.

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3.10^8}{4{,}76.10^{14}} = 6{,}30.10^{-7}\mathrm{m} = 630\ \mathrm{nm}$$

On remarque que $\lambda_2 = 450\ \mathrm{nm} < \lambda_1$, donc la largeur de la tache centrale diminue.

II – L'activité du polonium

1- L'équation de désintégration de polonium 210 :

$$^{210}_{84}\mathrm{Po} \longrightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

Lois de Soddy :

$$\begin{cases} 210 = A + 4 \\ 84 = Z + 2 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 206 \\ Z = 82 \end{cases} \implies {}^{A}_{Z}\mathrm{X} = {}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$$

$$^{210}_{84}\mathrm{Po} \longrightarrow {}^{206}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

2-1- Calcul de l'énergie $|E_1|$:

$$\boxed{E_1 = [m(^{206}_{82}Pb) + m(^{4}_{2}He) - m(^{210}_{84}Po)].c^2}$$

$$E_1 = (205,930 + 4,00151 - 209,9374)u.c^2 = -0,00589\ u.c^2$$

$$E_1 = -0,00589 \times 931,5MeV.c^{-2}.c^2 = -5,487\ MeV$$

$$\boxed{|E_1| \approx 5,49MeV}$$

2-2-Déduiction de l'énergie $|E_1|$:

$$N = \frac{m}{m(^{210}_{84}Po)}\ (1)$$

$$|E_2| = N.|E_1| \Longrightarrow \boxed{|E_2| = \frac{m}{m(^{210}_{84}Po)}.|E_1|}$$

A.N : $$|E_2| = \frac{10.10^{-3}}{209,9374\times1,6605.10^{-27}} \times 5,49 \times 1,6.10^{-13} \Longrightarrow \boxed{|E_2| \approx 2,52.10^{10}\ J}$$

3- Détermination de $t_{1/2}$:

La loi de décroissance radioactive : $a = a_0.e^{-\lambda.t} \Longrightarrow \frac{a}{a_0} = e^{-\lambda.t} \Longrightarrow -\lambda.t = \log\left(\frac{a}{a_0}\right)$

$$\frac{\ln2}{t_{1/2}}.t = -\ln\left(\frac{a}{a_0}\right) \Longrightarrow \boxed{t_{1/2} = -\frac{\ln2}{\ln\left(\frac{a}{a_0}\right)}.\Delta t}$$

A.N : $$t_{1/2} = -\frac{\ln2}{\ln\left(\frac{95}{100}\right)} \times \left(245 + \frac{37}{60}\right) \times \frac{1}{24} \Longrightarrow \boxed{t_{1/2} = 138,3\ \text{jours}}$$

4- Calcul de la masse maximal m_{max} :

D'après la relation (1) :

$$N = \frac{m}{m(^{210}_{84}Po)} \quad \text{et} \quad N_{max} = \frac{m_{max}}{m(^{210}_{84}Po)}$$

$$a_{max} = \lambda.N_{max} \Longrightarrow a_{max} = \lambda.\frac{m_{max}}{m(^{210}_{84}Po)} \Longrightarrow m_{max} = \frac{a_{max}.m(^{210}_{84}Po)}{\lambda}$$

$$\boxed{m_{max} = \frac{a_{max}.m(^{210}_{84}Po)}{\ln2}.t_{1/2}}$$

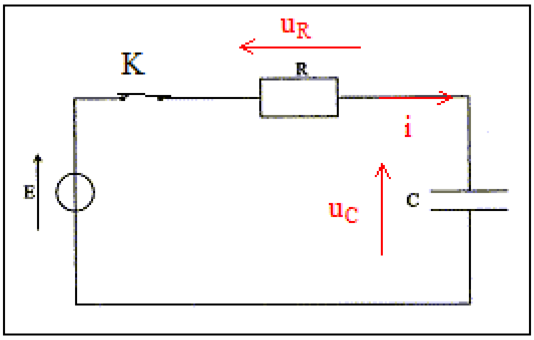
A.N : $$m_{max} = \frac{740\times209,9374\times1,6605.10^{-27}\times10^3\times138,3\times24\times3600}{\ln2} \Longrightarrow \boxed{m_{max} = 4,45.10^{-9}\ g}$$

Exercice 3 : Electricité (5,5 points)

Partie I :

1-Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension ascendant

1-1-1- L'équation différentielle vérifiée par i(t) :



Loi d'additivité des tensions : $u_R + u_C = E$

$$R.i + u_C = E \Longrightarrow \frac{d(R.i)}{dt} + \frac{C}{C}\frac{du_C}{dt} = 0 \Longrightarrow R.\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}.i = 0$$

$$\boxed{R.C\frac{di}{dt} + i = 0}$$

1-1-2- L'expression de $i(t)$:

$$i(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} \Longrightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On remplace dans l'équation différentielle :

$$-R.C.\frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + A.e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \Longrightarrow A.e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-R.C.\frac{1}{\tau} + 1\right) = 0$$

$$-R.C.\frac{1}{\tau} + 1 = 0 \Longrightarrow \tau = R.C$$

On détermine A en utilisant les conditions initiales :

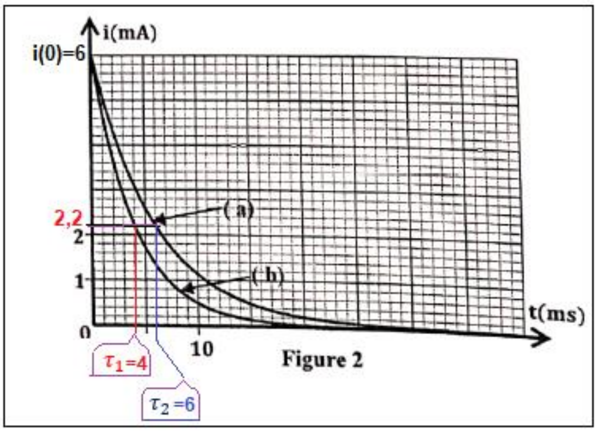
$$u_R(0) + u_C(0) = E \Longrightarrow R.i(0) + u_C(0) = E$$

$$u_C(0) = 0 \Longrightarrow i(0) = \frac{E}{R}$$

$$\begin{cases} i(t) = A.e^0 \\ i(0) = \frac{E}{R} \end{cases} \Longrightarrow A = \frac{E}{R}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{R.C}}}$$

1-2-1- La courbe de capacité C_1 :



On a : $\tau = R.C$ plus que la valeur de C augmente plus que celle de τ augmente.

On a : $C_2 > C_1 \Longrightarrow \tau_2 > \tau_1$ la courbe (b) correspond à C_1 .

1-2-2- Montrons que $i = 2,2$ mA à $t = \tau$:

$$i(\tau)=\frac{E}{R}.e^{-\frac{\tau}{R.C}} \Longrightarrow \boxed{i(\tau)=i(0).e^{-1}}$$

Graphiquement $i(0)=6\ \mathrm{mA}$

$$i(\tau)=6e^{-1} \Longrightarrow \boxed{i(\tau)=2{,}2\ \mathrm{mA}}$$

1-2-3- montrons que $C_1=4\ \mu F$:

$$C_e=C_1+C_2 \Longrightarrow C_1=C_e-C_2$$

D'après la courbe (b) $\tau_2=6\ \mathrm{ms}$ avec $\tau_2=R.C_2$

D'après la courbe (a) $\tau_1=4\ \mathrm{ms}$ avec $\tau_1=R.C_1$

$$\frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{R.C_2}{R.C_1} \Longrightarrow \frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{C_2}{C_1} \Longrightarrow C_2=\frac{6}{4}.C_1=\frac{3}{2}C_1$$

$$C_e=C_1+C_2 \Longrightarrow C_1+\frac{3}{2}C_1=C_e \Longrightarrow \frac{5}{2}C_1=C_e \Longrightarrow \boxed{C_1=\frac{2}{5}.C_e} \Longrightarrow C_1=\frac{2}{5}\times 10 \Longrightarrow \boxed{C_1=4\mu F}$$

1-2- La valeur de R et E :

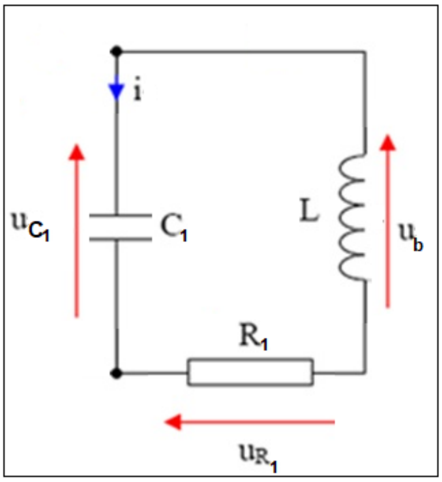
$$\tau_1=R.C_1 \Longrightarrow \boxed{R=\frac{\tau_1}{C_1}} \quad A.N: \quad R=\frac{4.10^{-3}}{4.10^{-6}} \Longrightarrow \boxed{R=10^3\Omega}$$

$$i(0)=\frac{E}{R} \Longrightarrow \boxed{E=i(0).R} \quad A.N: \quad E=6.10^{-3}\times 10^3 \Longrightarrow \boxed{E=6\ V}$$

2- Décharge d'un condensateur dans une bobine

2-1- L'équation différentielle vérifiée par u_{R_1} :

D'après la loi d'additivité des tensions :



$$u_b+u_{R_1}+u_{C_1}=0 \Longrightarrow \frac{du_b}{dt}+\frac{du_{R_1}}{dt}+\frac{du_{C_1}}{dt}=0$$

$$L.\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{du_{R_1}}{dt}+\frac{1}{C_1}.i=0$$

Loi d'ohm : $u_{R_1}=R_1.i \Longrightarrow i=\frac{1}{R_1}.u_{R_1}$

$$\frac{d^2i}{dt^2}=\frac{d^2\left(\frac{1}{R_1}.u_{R_1}\right)}{dt^2}=\frac{1}{R_1}.\frac{d^2u_{R_1}}{dt^2}$$

$$\frac{L}{R_1}.\frac{d^2u_{R_1}}{dt^2}+\frac{du_{R_1}}{dt}+\frac{1}{R_1.C_1}.u_{R_1}=0 \Longrightarrow \boxed{\frac{d^2u_{R_1}}{dt^2}+\frac{R_1}{L}\frac{du_{R_1}}{dt}+\frac{1}{L.C_1}.u_{R_1}=0}$$

2-2- La valeur R_1 :

A t=0 on a : $u_b(0) + u_{R_1}(0) + u_{C_1}(0) = 0$

$$u_{R_1}(0) = 0 \text{ et } u_{C_1}(0) = E \implies u_b(0) = -E$$

$$u_b = L.\frac{di}{dt} = \frac{L}{R_1}.\frac{du_{R_1}}{dt}$$

$$\frac{L}{R_1}.\frac{du_{R_1}}{dt} = -E \implies \boxed{R_1 = -\frac{L}{E}.\frac{du_{R_1}}{dt}}$$

$$R_1 = -\frac{0,1}{6}.\left(\frac{0+0,2}{0-0,5.10^{-3}}\right) \implies \boxed{R_1 = 6,67\ \Omega}$$

Partie II : Etude d'un signal modulé en amplitude

1- La valeur de N_1 et N_2 :

$$\boxed{N_1 = F - f} \implies N_1 = 10^5 - 10^3 \implies \boxed{N_1 = 9,9.10^4\ \text{Hz}}$$

$$\boxed{N_2 = F + f} \implies N_2 = 10^5 + 10^3 \implies \boxed{N_2 = 1,01.10^5\ \text{Hz}}$$

2- Expression du taux de modulation m :

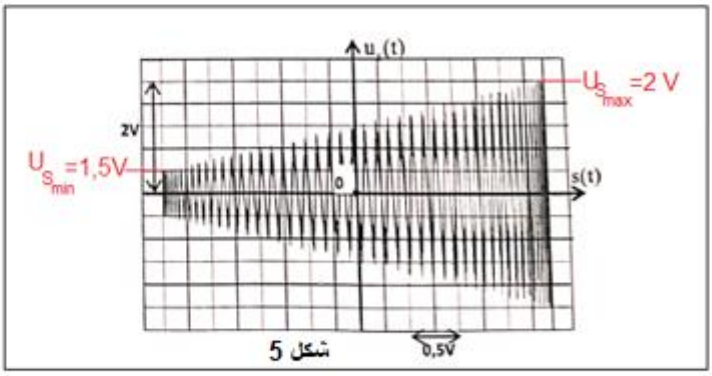
$$\boxed{m = \frac{S_m}{U_0}}$$

3-1- La détermination graphique de τ :

$$\boxed{m = \frac{U_{S_{max}} - U_{S_{min}}}{U_{S_{max}} + U_{S_{min}}}}$$

$$U_{S_{min}} = 0,5\ V \quad \text{et} \quad U_{S_{max}} = 2V$$

$$m = \frac{2-0,5}{2+0,5} = \frac{2}{3} \implies \boxed{m \approx 0,67}$$



3-2- Les valeurs des tensions U_0 et U_m :

D'après la figure 5 : $S_m = 2\ V$

$$m = \frac{S_m}{U_0} \implies \boxed{U_0 = \frac{S_m}{m}}$$

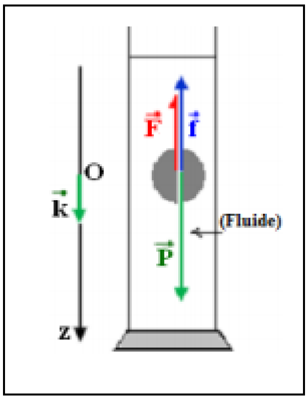
$$U_0 = \frac{2}{\frac{2}{3}} \implies \boxed{U_0 = 3\ V}$$

$$U_{S_{max}} = A(m+1) \implies K.U_0.U_m(m+1) = U_{S_{max}}$$

$$\boxed{U_m = \frac{U_{S_{max}}}{K.U_0(m+1)}} \Longrightarrow U_m = \frac{2}{0,1 \times 3 \times \left(\frac{2}{3}+1\right)} \Longrightarrow \boxed{U_m = 4\,V}$$

Exercice 4 : Mécanique (3,25 points)

Partie I : Mouvement de chute verticale d'une bille dans un liquide visqueux



1- L'équation différentielle :

Système étudié : $\{la\ bille\}$

Bilan des forces :

$\vec{P}$: Le poids ;

$\vec{F}$: La poussée d'Archimède ;

$\vec{f}$: La force de frottement fluide.

Application de la deuxième loi de Newton dans un repère lié à terre supposé galiléen :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

Projection sur l'axe Oz :

$$P - F - f = m.a_z \Leftrightarrow \rho_S.V.g - \rho_\ell.V.g - 6\pi\eta.r.\text{V} = \rho_S.V.\frac{d\,\text{V}}{dt}$$

$$\frac{d\,\text{V}}{dt} + \frac{6\pi\eta.r}{\rho_S.V}..\text{V} = \left(\frac{\rho_S.V}{\rho_S.V} - \frac{\rho_\ell.V}{\rho_S.V}\right).g \Longrightarrow \frac{d\,\text{V}}{dt} + \frac{6\pi\eta.r}{\rho_S.\frac{4}{3}.\pi.r^3}..\text{V} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g$$

$$\frac{d\,\text{V}}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_S.r^2}.\text{V} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g$$

On pose : $\frac{1}{\tau} = \frac{9\eta}{2\rho_S.r^2} \Longrightarrow \tau = \frac{2\rho_S.r^2}{9\eta}$

$$\boxed{\frac{d\,\text{V}}{dt} + \frac{1}{\tau}.\text{V} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g}$$

2- L'expression de la vitesse limite :

Quand la bille atteint sa vitesse limite, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{1}{\tau}.\text{V}_{\ell im} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g \Longrightarrow \frac{9\eta}{2\rho_S.r^2}.\text{V}_{\ell im} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g \Longrightarrow \boxed{\eta = \frac{2\rho_S.r^2.g}{9.\text{V}_{\ell im}}.\left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right)}$$

A.N : $\eta = \frac{2\times4490\times(6,3.10^{-3})^2\times9,81}{9\times1}.\left(1 - \frac{860}{4490}\right) \Longrightarrow \boxed{\eta = 0,314\ Pa.s}$

3- Calcul de z(t) à t = 7τ :

On a : $$z(t) = V_{\ell im}\left[t + \tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)\right]$$

$$z(7\tau) = V_{\ell im}\left[7\tau + \tau\left(e^{-\frac{7\tau}{\tau}} - 1\right)\right] \Longrightarrow z(7\tau) = \tau.V_{\ell im}\,[7 + (e^{-1} - 1)]$$

$$\frac{1}{\tau}.V_{\ell im} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g \quad \Longrightarrow \tau = \frac{V_{\ell im}}{\left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g}$$

$$z(7\tau) = \tau.V_{\ell im}\,[7 + (e^{-1} - 1)] \Longrightarrow \boxed{z(7\tau) = \frac{{V_{\ell im}}^2}{\left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g}.[7 + (e^{-1} - 1)]}$$

A.N : $$z(7\tau) = \frac{1^2}{\left(1 - \frac{860}{4490}\right)\times 9{,}81}.[7 + (e^{-1} - 1)] = 0{,}803\ m \Longrightarrow \boxed{z(7\tau) = 80{,}3\ cm}$$

Explication :

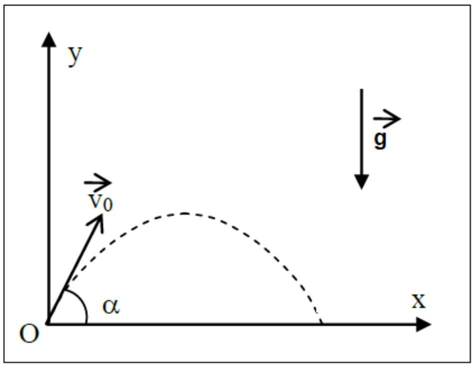
A $t = \tau$ la bille atteint sa vitesse limite sa cote est $z(7\tau) = 80{,}3\ cm$

On a : $z(7\tau) < h$, donc la bille atteint sa vitesse limite avant d'arriver au fond du tube.

Ce tube est convenable pour la mesure expérimentale de $V_{\ell im}$.

Partie II : Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur

1- L'équation différentielle :



- Système étudié : $\{la\ projectile\}$
- Bilan des forces :

$\vec{P}$: Le poids ;

- Application de la deuxième loi de Newton dans le repère $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ lié à terre supposé galiléen :

$$\vec{P} = m.\vec{a}_G \Leftrightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$$

- Projection sur l'axe $Ox\ et\ Oy$:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_x = \dfrac{d\,V_x}{dt} \\ a_y = \dfrac{d\,V_y}{dt} \end{cases} \xrightarrow{\text{Intégration}} \begin{cases} V_x = C_1 \\ V_y = -g.t + C_2 \end{cases}$$

D'après las conditions initiales :

$$\vec{V}_0 \begin{cases} C_1 = V_{0x} = V_0.cos\alpha \\ C_2 = V_{0y} = V_0.sin\alpha \end{cases} \quad ; \quad \overrightarrow{OG}_0 \begin{cases} C_3 = x_0 = 0 \\ C_4 = y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = V_0.cos\alpha \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = -g.t + V_0.sin\alpha \end{cases} \xrightarrow{\text{Intégration}} \begin{cases} x(t) = V_0.cos\alpha.t + C_3 \\ y(t) = \dfrac{1}{2}g.t^2 + V_0.sin\alpha.t + C_4 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = V_0.cos\alpha.t \\ y(t) = \dfrac{1}{2}g.t^2 + V_0.sin\alpha.t \end{cases}}$$

2-L'équation de la trajectoire :

On élimine le temps des deux équations horaires $x(t) et\ y(t)$:

$$x = V_0.cos\alpha.t \implies t = \frac{x}{V_0.cos\alpha}$$

$$y = \frac{1}{2}g.\left(\frac{x}{V_0.cos\alpha}\right)^2 + V_0.sin\alpha.\left(\frac{x}{V_0.cos\alpha}\right) \implies \boxed{y = -\frac{g}{V_0^2.cos^2\alpha}.x^2 + x.tan\alpha}$$

3-1- Les valeurs des angles α pour atteindre la cible A :

$$y_1 = -\frac{g}{2\,V_0^2.cos^2\alpha}.{x_1}^2 + x_1.tan\alpha$$

$$100 = -\frac{10}{2\times 100^2}\times 400^2 \times \frac{1}{cos^2\alpha} + 400\ tan\alpha \implies -80(1+tan^2\alpha) + 400\ tan\alpha - 100 = 0$$

$$tan^2\alpha - 5\ tan\alpha + 2{,}25 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5^2 - 4\times 2{,}25} = 4$$

$$tan\alpha_1 = \frac{5-4}{2} = 0{,}5 \implies \alpha_1 = tan^{-1}(0{,}5) \implies \boxed{\alpha_1 = 26{,}56\,°}$$

$$tan\alpha_2 = \frac{5+4}{2} = 4{,}5 \implies \alpha_2 = tan^{-1}(4{,}5) \implies \boxed{\alpha_2 = 77{,}47\,°}$$

3-2- L'équation de la courbe (C):

D'après l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{g}{2\,V_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + x.\tan\alpha = -\frac{g.x^2}{2\,V_0^2}.(1+\tan^2\alpha) + x.\tan\alpha$$

$$y = -\frac{g.x^2}{2\,V_0^2}.\tan^2\alpha + x.\tan\alpha - \frac{g.x^2}{2\,V_0^2}$$

$$\frac{d\,y}{d\tan\alpha} = -\left(\frac{g.x}{V_0^2}.\tan\alpha + 1\right)x = 0 \implies \tan\alpha = \frac{V_0^2}{g.x}$$

On remplace $tan\ \alpha$ dans l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{g.x^2}{2\,V_0^2}.\left(\frac{V_0^2}{g.x}\right)^2 + \cancel{x}.\left(\frac{V_0^2}{g.\cancel{x}}\right) - \frac{g.x^2}{2\,V_0^2} = -\frac{g.\cancel{x^2}.V_0^4}{2\,V_0^2.g^2.\cancel{x^2}} + \frac{V_0^2}{g} - \frac{g}{2\,V_0^2}.x^2$$

$$y = -\frac{V_0^2}{2g} + \frac{V_0^2}{g} - \frac{g}{2\,V_0^2}.x^2 \Longrightarrow \boxed{y(x) = -\frac{g}{2\,V_0^2}.x^2 + \frac{V_0^2}{2g}}$$