المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2003

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) الآتية : $\boxed{(E)\ :\ x^2(x^2+7)=y(2x+y)}$

ليكن (x,y) عنصرا من $(\mathbb{N}^*)^2$ و ليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y

نضع : $x=\delta a$ و $y=\delta b$

① نفترض أن (x,y) حل للمعادلة (E) .

(أ) تحقق أن : $a^2(\delta^2a^2+7)=b(2a+b)$ — 0,50 ن

(ب) إستنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $\delta^2a^2+7=kb$ و $2a+b=ka^2$ — 0,50 ن

(ج) بين أن : $a=1$ — 0,50 ن

(د) إستنتج أن : $(b+1)^2=\delta^2+8$ — 0,75 ن

② حل في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) . — 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر المنحنى (E) الذي معادلته : $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$

① (أ) بين أن (E) جزء من إهليلج يتم تحديده. — 0,50 ن

(ب) أرسم المنحنى (E) . — 0,50 ن

② لتكن A و B النقطتين اللتين زوجا إحداثيتيهما على التوالي هما : $(4;0)$ و $(0;3)$ — 0,75 ن

نعتبر النقطة M_1 من (E) التي أفصولها x_1 حيث x_1 ينتمي إلى المجال $[0;4]$.

نضع : $x_1=4\cos(t_1)$ حيث : $0\le t_1\le\frac{\pi}{2}$ و نعتبر التكامل الآتي : $I(x_1)=\frac{3}{4}\int_{x_1}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

(أ) باستعمال المكاملة بتغيير المتغير و ذلك بوضع $x=4\cos(t)$ حيث : $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ — 1,00 ن

بين أن : $I(x_1)=6t_1-3\sin(2t_1)$

(ب) لتكن $S(x_1)$ مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OM_1) و المنحنى (E) . — 0,75 ن

و لتكن S مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OB) و المنحنى (E)

0,25 ن | ب) تحقق أن أرتوب النقطة M_1 هو $3\sin(t_1)$

0,25 ن | ج) أحسب $S(x_1)$ بدلالة t_1 .

0,25 ن | د) إستنتج قيمة S .

0,25 ن | و) بين أن : $t_1 = \frac{\pi}{4} \iff S(x_1) = \frac{1}{2}S$

0,25 ن | هـ) حدد إحداثيتي M_1 في المعلم $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ في حالة : $t_1 = \frac{\pi}{4}$

التمرين الثالث : (4,5 ن)

الجزء الأول لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ نعتبر المصفوفة : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

لتكن E مجموعة المصفوفات الآتية : $\boxed{E = \{M_{(a,b)} \;/\; (a,b)\epsilon\mathbb{R}^2\}}$

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية.

0,75 ن | 1) بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ و من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

0,25 ن | 2) بين أن : $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و احدية.

0,50 ن | 3) أ) بين أن لكل عددين حقيقيين x و y لدينا : $(x=y=0) \iff (x^2+xy+y^2=0)$

0,25 ن | ب) حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(E,+,\times)$

0,50 ن | ج) إستنتج أن : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .

الجزء الثاني ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

0,25 ن | 1) بين أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$

0,75 ن | 2) نعتبر التطبيق ψ المعرف من E نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \psi & : & E & \to \mathbb{C} \\ & & M_{(a,b)} & \to a+\sigma b \end{array}}$$

بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

0,75 ن | 3) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - z + 1 = 0$

حل في مجموعة الأعداد العقدية هذه المعادلة و اكتب حليها على الشكل المثلثي

0,50 ن | 4) نفترض في هذا السؤال أن : $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

بين أن ψ تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{4\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{2}$

(I) و ليكن $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ وحدته : $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=2\ cm$

0,50 ن | 1 أحسب : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C})$

0,25 ن | 2 أ) بين أن : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ f'(x)=4\left(\dfrac{1-2\ln x}{x^3}\right)$

0,75 ن | ب) إعط جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن | 3 بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α و β بحيث : $1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$

0,50 ن | 4 حدد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي أفصولها 1

0,75 ن | 5 أرسم $(\mathscr{C})$

0,25 ن | (II) 1 بين أن : $\forall\ t\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ 1-t\leq\dfrac{1}{1+t}\leq 1$

0,50 ن | 2 استنتج أن : $\forall\ a\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ a-\dfrac{a^2}{2}\leq\ln(1+a)\leq a$

(III) لكل عدد صحيح n بحيث $n\geq 4$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=\dfrac{n\ ln\ x}{x^2}-\dfrac{1}{2}$

و ليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم .

0,50 ن | 1 أدرس تغيرات الدالة f_n .

0,50 ن | 2 أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_n)$ و بين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{5}{6}}$

0,25 ن | 3 أ) قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ حسب قيم x .

0,25 ن | ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$.

0,50 ن | 4 بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث : $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$

0,50 ن | 5 بين أن $(u_n)_{n\geq 4}$ متتالية تناقصية قطعا مستعملا نتيجة السؤال 3

0,25 ن | 6 أ) باستعمال (II)2 بين أن : $(\forall n\geq 4)\ ;\ \dfrac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}\leq\ln(u_n)\leq u_n-1$

0,25 ن | ب) استنتج أن : $(\forall n\geq 4)\ ;\ \dfrac{(u_n)^2}{2n}\leq u_n-1\leq\dfrac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$

0,25 ن | ج) بين أن : $(\forall n\geq 4)\ ;\ \dfrac{1}{2n}\leq u_n-1\leq\dfrac{e}{n}$

0,50 ن | د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 4}$ متقاربة محددا نهايتها

0,50 ن | 7 أ) بين أن : $(\forall n\geq 4)\ ;\ e^{\frac{5}{6}}<v_n$

0,50 ن | ب) استنتج أن : $\lim\limits_{n\infty} v_n=+\infty$

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ 1 أ

لدينا (x,y) حل للمعادلة (E) .

$$\Leftrightarrow \quad x^2(x^2+7)=y(2x+y)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\delta a)^2((\delta a)^2+7)=(\delta b)(2\delta a+\delta b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{a^2(\delta^2a^2+7)=b(2a+b)}\ (*)$$

■ 1 ب

لدينا : $x\wedge y=\delta$

$$\Leftrightarrow \quad \delta a\wedge \delta b=\delta$$

$$\Leftrightarrow \quad a\wedge b=1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{a^2\wedge b=1}\quad (1)$$

و لدينا حسب النتيجة $(*)$: $b\ /\ a^2(\delta^2a^2+7)$

و بما أن $a^2\wedge b=1$ وذلك حسب النتيجة (1)

فإنه حسب $(Gauss)$: $\boxed{b\ /\ (\delta^2a^2+7)}$

و منه : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ :\ (\delta^2a^2+7)=kb$

في المعادلة $(*)$ نعوض التعبير (δ^2a^2+7) بالتعبير kb نجد :

$$kba^2=b(2a+b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{ka^2=(2a+b)}$$

■ 1 ج

ننطلق من الكتابة : $ka^2=2a+b$

$$\Leftrightarrow \quad a(ka-2)=b$$

$$\Rightarrow \quad a\ /\ b$$

$$\Rightarrow \quad a\ /\ 1b$$

و بما أن : $a\wedge b=1$ فإنه حسب $(Gauss)$: $\boxed{a\ /\ 1}$

و نعلم أن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو 1 نفسه

و بالتالي : $\boxed{a=1}$

■ 1 د

نعوض a بالعدد 1 في المعادلة $(*)$ نجد : $\delta^2+7=b(2+b)$

$$\Leftrightarrow \quad \delta^2+7=b^2+2b$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta^2+7+1=b^2+2b+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta^2+8=(b+1)^2$$

■ 2

ننطلق من الكتابة : $(b+1)^2=\delta^2+8$

$$\Leftrightarrow \quad (b+1)^2-\delta^2=8$$

$$\Leftrightarrow \quad (b+1-\delta)(b+1+\delta)=8$$

نفصل هنا بين أربع حالات :

الحالة الأولى :

$$\begin{cases} b+1-\delta=-1 \\ b+1+\delta=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{-11}{2} \\ \delta=\dfrac{-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-7}{2}\notin\mathbb{N} \\ y=\dfrac{77}{4}\notin\mathbb{N} \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} b+1-\delta=-8 \\ b+1+\delta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{-11}{2} \\ \delta=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{2}\notin\mathbb{N} \\ y=\dfrac{-77}{4}\notin\mathbb{N} \end{cases}$$

الحالة الثانية :

$$\begin{cases} b+1-\delta=1 \\ b+1+\delta=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{7}{2} \\ \delta=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{2}\notin\mathbb{N} \\ y=\dfrac{49}{4}\notin\mathbb{N} \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} b+1-\delta=8 \\ b+1+\delta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{7}{2} \\ \delta=\dfrac{-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-7}{2}\notin\mathbb{N} \\ y=\dfrac{-49}{4}\notin\mathbb{N} \end{cases}$$

الحالة الثالثة :

$$\begin{cases} b+1-\delta=2 \\ b+1+\delta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ \delta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=1\ \epsilon\ \mathbb{N} \\ y=2\ \epsilon\ \mathbb{N} \end{cases}}$$

أو

$$\begin{cases} b+1-\delta=4 \\ b+1+\delta=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ \delta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1\ \notin\ \mathbb{N} \\ y=-2\ \notin\ \mathbb{N} \end{cases}$$

الحالة الرابعة :

$$\begin{cases} b+1-\delta=-2 \\ b+1+\delta=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4 \\ \delta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1\notin\mathbb{N} \\ y=4\ \epsilon\ \mathbb{N} \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} b+1-\delta=-4 \\ b+1+\delta=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4 \\ \delta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1\ \epsilon\ \mathbb{N} \\ y=-4\notin\mathbb{N} \end{cases}$$

نستنتج من هذه الدراسة أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في $(\mathbb{N}^*)^2$

و هو الزوج : $(x, y) = (1,2)$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ ① أ

يكون التعبير $\sqrt{16-x^2}$ معرَّفا إذا كان $16 - x^2 \geq 0$

و يبين الجدول التالي إشارة : $(16-x^2) = (4-x)(4+x)$

	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$(4-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$(4+x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(16-x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

يكون إذن التعبير $\sqrt{16-x^2}$ مُعَرَّفا إذا كان $x \in [-4;4]$

و لدينا : $y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} \geq 0$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{9}{16}(16-x^2)$$

$$\Rightarrow \quad y^2 + \frac{9}{16}x^2 = 9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

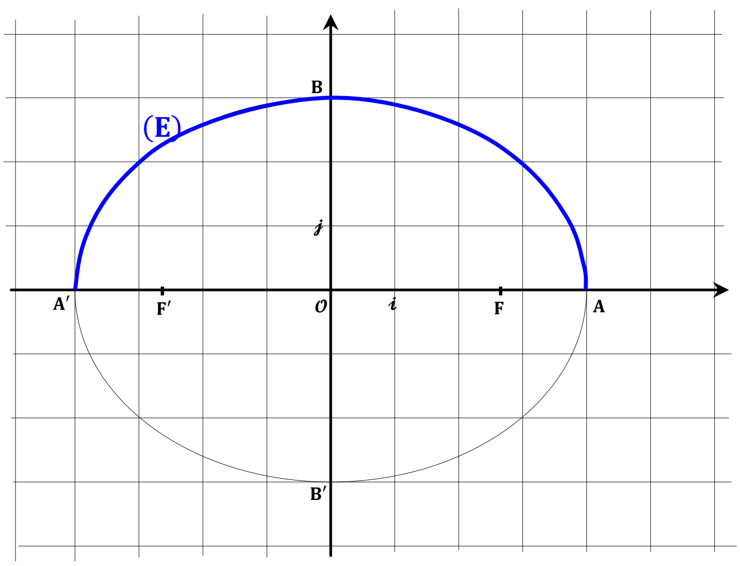
$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad ; \quad x \in [-4;4] \ ; \ y \geq 0}$$

إذن : (E) هو النصف العلوي للإهليلج الذي مركزه O

و رؤوسه $A(4,0)$ و $A'(-4,0)$ و $B(0,3)$ و $B'(0,-3)$

و بؤرتاه : $F(\sqrt{7};0)$ و $F'(-\sqrt{7};0)$

■ ① ب



■ ② أ

لدينا : $I(x_1) = \frac{3}{4}\int_{x_1}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$

نضع : $x = 4\cos t$ إذن : $dx = -4\sin t\ dt$

إذا كان $x = x_1$ فإن : $t = t_1$ لأن : $x_1 = 4\cos t_1$

إذا كان $x = 4$ فإن : $t = 0$ لأن : $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$

إذن :

$$I(x_1) = \frac{3}{4}\int_{t_1}^{0} (4\sin t)(-4\sin t)\,dt = -12\int_{t_1}^{0} \sin^2 t\,dt$$

نعلم أن : $\sin^2 t = \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)$

و ذلك بإخطاط الدالة المثلثية $t \to \sin^2 t$

إذن : $I(x_1) = -12\int_{t_1}^{0}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt$

$$\Leftrightarrow \quad I(x_1) = -12\left(\left[\frac{t}{2}\right]_{t_1}^{0} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_{t_1}^{0}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad I(x_1) = -12\left(\frac{-t_1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin 2t_1}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{I(x_1) = 6t_1 - 3\sin 2t_1}$$

■ ② ب

لدينا M_1 نقطة من (E) و أفصولها x_1 .

إذن : أرتوبها y_1 يحقق ما يلي :

$$y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16-x_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16-(4\cos t_1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16(1-\cos^2 t_1)}$$

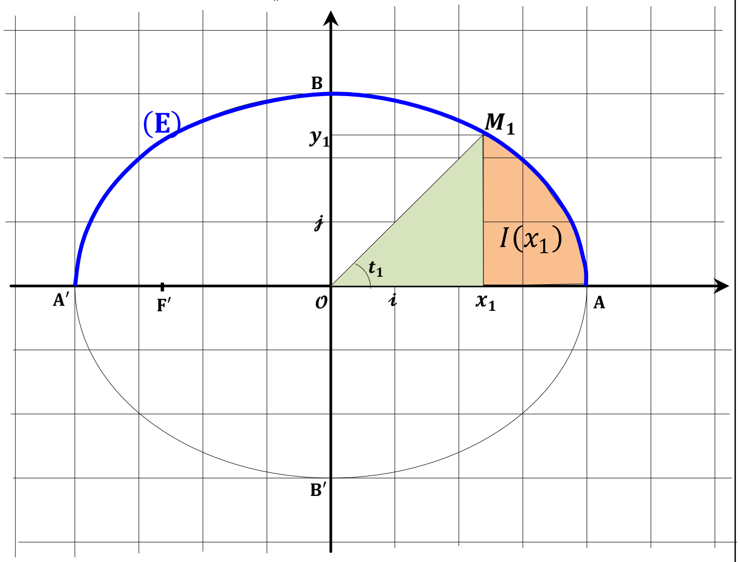
$$\Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16\sin^2 t_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{3}{4}\cdot 4\sin t_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y_1 = 3\sin t_1}$$

■ ② ج

نستعين بالشكل التالي :



لدينا حسب هذا الشكل : $\mathcal{S}(x_1) = \mathcal{S}(Ox_1M_1) + I(x_1)$

$$= \frac{x_1 \times y_1}{2} + I(x_1)$$

$$= \frac{4\cos(t_1) \times 3\sin(t_1)}{2} + I(x_1)$$

$$= 6\cos(t_1)\sin(t_1) + I(x_1)$$

$$= 3\sin(2t_1) + I(x_1)$$

$$= 3\sin(2t_1) + 6t_1 - 3\sin(2t_1)$$

$$= 6t_1$$

■ ② د

لدينا : $\mathcal{S}(x_1) = 6t_1$

إذن : $\mathcal{S} = \mathcal{S}(0) = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$

■ ② و

$$\mathcal{S}(x_1) = \frac{1}{2}\mathcal{S}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6t_1 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{4}$$

■ ② هـ

لدينا : $M_1 \begin{pmatrix} 4\cos t_1 \\ 3\sin t_1 \end{pmatrix}$

يعني : $\overrightarrow{OM_1} = 4\cos(t_1)\vec{i} + 3\sin(t_1)\vec{j}$

من أجل : $t_1 = \frac{\pi}{4}$ نحصل على : $\overrightarrow{OM_1} = 2\sqrt{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{j}$

ونعلم أن : $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ و $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

إذن : $\overrightarrow{OM_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OB}$

و منه النقطة M_1 مُعَرَّفَة بالزوج : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ في المعلم $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$

التمرين الثالث : (4,5 ن)

■ (I) ①

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا :

$$M(a,b) + M(c,d) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d & d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a+b)+(c+d) & -(b+d) \\ (b+d) & (a+c) \end{pmatrix}$$

$$= M\big((a+c),(b+d)\big) \in E$$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$

و لدينا كذلك :

$$M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c+d & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ac-bd)+(bc+ad+bd) & -(bc+ad+bd) \\ (bc+ad+bd) & (ac-bd) \end{pmatrix}$$

$$= M\big((ac-bd)\,;\,(bc+ad+bd)\big) \in E$$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

■ (I) ②

لدينا E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$

إذن $+$ قانون تركيب داخلي في E .

و بما أن : $+$ تبادلي و تجميعي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن $+$ تبادلي و تجميعي في E .

و بما أن $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لِـ $+$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن : $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لِـ $+$ في E .

و لدينا :

$$M(a,b)+M(-a,-b)=M(-a,-b)+M(a,b)=M(0,0)$$

إذن كل مصفوفة $M(a,b)$ من E تقبل مماثلة $M(-a,-b)$ بالنسبة لـ $+$

و بالتالي : $\boxed{(E,+)\ \text{زمرة تبادلية .}}$ (1)

بما أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .

و بما أن : E جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن : $\boxed{\times\ \text{تجميعي و توزيعي على}\ +\ \text{في}\ E\ .}$ (2)

و لدينا : $M(a,c)\times M(1,0)=M(a,c)$

و : $M(1,0)\times M(a,c)=M(a,c)$

إذن $\boxed{M(1,0)\ \text{هو العنصر المحايد لـِ}\ \times\ \text{في}\ E\ .}$ (3)

و لدينا :

$$M(a,b)\times M(c,d)=M\big((ac-bd)\,;\,(bc+ad+bd)\big)$$
$$=M(c,d)\times M(a,b)$$

و منه : $\boxed{\times\ \text{تبادلي في}\ E\ .}$ (4)

من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$\boxed{(E,+,\times)\ \text{حلقة واحدية تبادلية.}}$

■ (I) ③ أ

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث : $x^2+xy+y^2=0$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2+xy+y^2-xy=-xy\\ x^2+xy+y^2+xy=xy\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2+y^2=-xy\geq 0\\ (x+y)^2=xy\geq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ xy=0$$

$$\Rightarrow\ \boxed{x^2+y^2=0}$$

إذن : $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ نقطة من الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها O و شعاعها 0

و لإيقاف هذا العبث المبين نقول : $\boxed{x=y=0}$

عكسيا : إذا كان $x=y=0$ فإن : $x^2+xy+y^2=0$

و بالتالي :

$$\boxed{\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ (x^2+xy+y^2)\Leftrightarrow(x=y=0)}$$

■ (I) ③ ب

لدينا : $M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b & -b\\ b & a\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\ \det M(a,b)=a^2+ab+b^2$$

إذن : تكون المصفوفة $M(a,b)$ قابلة للقلب إذا كان $a^2+ab+b^2\neq 0$

يعني : $a\neq 0$ أو $b\neq 0$

و بالتالي : جميع عناصر المجموعة $E\setminus\{M(0,0)\}$ قابلة للقلب .

و لدينا :

$$\big(M(a,b)\big)^{-1}=\frac{1}{a^2+ab+b^2}\begin{pmatrix}a & b\\ -b & (a+b)\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a^2+ab+b^2}\begin{pmatrix}(a+b)+(-b) & -(-b)\\ (-b) & (a+b)\end{pmatrix}$$
$$=M\left(\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\ ;\ \frac{-b}{a^2+ab+b^2}\right)$$

■ (I) ③ ج

نعتبر المجموعة $(E\setminus\{M(0,0)\}\,;\times)$

لدينا : $\times$ قانون تركيب داخلي في $E\setminus\{M(0,0)\}$

لأن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

و لدينا : $M(1,0)$ هو العنصر المحايد لـِ $\times$ في $E\setminus\{M(0,0)\}$

و كل عنصر يقبل مماثلا(مقلوبا) في $E\setminus\{M(0,0)\}$

إذن : $\boxed{(E\setminus\{M(0,0)\}\,;\times)\ \text{زمرة.}}$ (5)

و نعلم أن : $\boxed{(E,+)\ \text{زمرة تبادلية}}$ (6)

و نعلم كذلك أن $\boxed{\times\ \text{تبادلي و توزيعي على}\ +\ \text{في}\ E\setminus\{M(0,0)\}}$ (7)

إذن من النتائج (5) و (6) و (7) نستنتج أن : $\boxed{(E,+,\times)\ \text{جسم تبادلي}}$

■ (II) ①

ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$

إذن : $(\exists\sigma_1\in\mathbb{R}),(\exists\sigma_2\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \sigma=\sigma_1+i\sigma_2$

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا .

نضع : $z=m_1+m_2\sigma$

$$\Rightarrow\ z=m_1+m_2(\sigma_1+i\sigma_2)$$
$$\Rightarrow\ z=m_1+m_2\sigma_1+im_2\sigma_2$$

بما أن : $z=x+iy$ فإن : $\begin{cases}x=m_1+m_2\sigma_1\\ y=m_2\sigma_2\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}m_1=\left(x-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}y\right)\in\mathbb{R}\\ m_2=\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)\in\mathbb{R}\end{cases}$

يعني : $(\forall z\in\mathbb{C}), (\exists(m_1,m_2)\in\mathbb{R}^2) \ ; \ z = m_1 + m_2\sigma$

إذن $\boxed{\{1;\sigma\} \text{ أسرة مولدة لـ } \mathbb{C} \text{ .}}$ (8)

لتكن $x+\sigma y$ تأليفة خطية منعدمة لِـ 1 و σ يعني : $x+\sigma y = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x + y(\sigma_1 + i\sigma_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y\sigma_1=0\\ \sigma_2 y = 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

إذن $\boxed{\{1;\sigma\} \text{ أسرة حرة}}$ (9)

من (8) و (9) نستنتج أن $\{1;\sigma\}$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

■ (II) ②

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا :
$$\begin{aligned}\psi\big(M(a,b)+M(c,d)\big) &= \psi\big(M(a+c\,;b+d)\big)\\ &= (a+c)+\sigma(b+d)\\ &= (a+\sigma b)+(c+\sigma d)\\ &= \psi\big(M(a,b)\big)+\psi\big(M(c,d)\big)\end{aligned}$$

إذن ψ تشاكل من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

ليكن $(a+\sigma b)$ عنصرا من $\mathbb{C}$.

لنحل المعادلة $\psi\big(M(x,y)\big) = a+\sigma b$ ذات المجهول $M(x,y)$ في E

لدينا : $\psi\big(M(x,y)\big) = a+\sigma b$

$$\Leftrightarrow \quad x+\sigma y = a+\sigma b$$

بما أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$

فإن كل عدد عقدي يكتب بكيفية وحيدة على شكل تأليفة خطية للعنصرين 1 و σ

و بالتالي : إذن : $\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$

$$(\forall(a+\sigma b)\in\mathbb{C})\ ;\ \exists!\, M(x,y)\in E \ : \ \psi\big(M(x,y)\big) = (a+\sigma b)$$

و منه : ψ تقابل من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

$\boxed{\text{و بالتالي } \psi \text{ تشاكل تقابلي من } (E,+) \text{ نحو } (\mathbb{C},+)}$

■ (II) ③

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - z + 1 = 0$

لدينا : $\Delta = \left(i\sqrt{3}\right)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\\ &= e^{\left(\frac{-i\pi}{3}\right)}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= e^{\left(\frac{i\pi}{3}\right)}\end{aligned}$$

■ (II) ④

لدينا : $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن :
$$\begin{aligned}\sigma^2 + 1 &= \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1\\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\\ &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\sigma^2+1=\sigma}$

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا : $\psi\big(M(a,b)\times M(c,d)\big) = \psi\big(M(ac-bd\,;bc+ad+bd)\big)$

$$= (ac-bd) + \sigma(bc+ad+bd)$$

و لدينا من جهة أخرى :

$$\begin{aligned}\psi\big(M(a,b)\big)\times\psi\big(M(c,d)\big) &= (a+\sigma b)\times(c+\sigma d)\\ &= ac + ad\sigma + bc\sigma + \sigma^2 bd\\ &= ac + ad\sigma + bc\sigma + (\sigma-1)bd\\ &= ac + ad\sigma + bc\sigma + bd\sigma - bd\\ &= \boxed{(ac-bd)+\sigma(bc+ad+bd)}\end{aligned}$$

نستنتج إذن أن :

$$\psi\big(M(a,b)\times M(c,d)\big) = \psi\big(M(a,b)\big)\times\psi\big(M(c,d)\big)$$

و بالتالي : $\boxed{\psi \text{ تشاكل من } (E,\times) \text{ نحو } (\mathbb{C},\times)}$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

■ (I) ①

لدينا :
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \underbrace{\left(\frac{4}{x}\right)}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{-\infty} - \frac{1}{2} = \boxed{-\infty}$$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي لِـ $(\mathscr{C})$

و لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{4}{x}\right)}_{0^+}\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{0^+} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

إذن المستقيم $y = \frac{-1}{2}$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

■ (I) ② (أ)

f دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ لأنها عبارة عن تشكيلة من الدوال المعرفة و القابلة للأشتقاق على $]0;+\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$

لدينا :
$$\begin{aligned} f'(x) = 4\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' &= \frac{4(x-2x\ln x)}{x^4}\\ &= \frac{4(1-2\ln x)}{x^3}\end{aligned}$$

■ (I) ② ب

لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[\quad ; \quad f'(x) = \frac{4(1-2\ln x)}{x^3}$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-2\ln x)$

إذا كان : $x = \sqrt{e}$ فإن : $f'(x) = 0$

إذا كان : $x > \sqrt{e}$ فإن : $f'(x) < 0$

إذا كان : $x < \sqrt{e}$ فإن : $f'(x) > 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$

■ (I) ③

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f :

f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0;\sqrt{e}[$

إذن f تقابل من أي مجال I ضمن $]0;\sqrt{e}[$ نحو صورته $f(I)$.

إذن : f تقابل من المجال $]1;\sqrt{e}[$ نحو $]f(1);f(\sqrt{e})[$

أي f تقابل من $]1;\sqrt{e}[$ نحو $]-0{,}5\,;0{,}2[$

و بما أن : $0 \in]-0{,}5\,;0{,}2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا α في المجال $]1;\sqrt{e}[$ بالتقابل f أي : $\boxed{\exists!\ \alpha \in]1;\sqrt{e}[\ ;\ f(\alpha)=0}$ (1)

<u>و بنفس الطريقة :</u>

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]\sqrt{e}\,;+\infty[$

إذن f تقابل من أي مجال J ضمن $]\sqrt{e}\,;+\infty[$ نحو صورته $f(J)$

أي f تقابل من المجال $]\sqrt{e}\,;3[$ نحو المجال $]f(3)\,;f(\sqrt{e})[$

أي f تقابل من $]\sqrt{e}\,;3[$ نحو $]-0{,}01\,;\,0{,}2[$

و بما أن $0 \in]-0{,}01\,;\,0{,}2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا β في المجال $]\sqrt{e}\,;3[$ بالتقابل f

أي : $\boxed{\exists!\ \beta \in]\sqrt{e}\,;3[\ \ ;\ f(\beta)=0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلين مختلفين α و β

بحيث : $\boxed{1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3}$

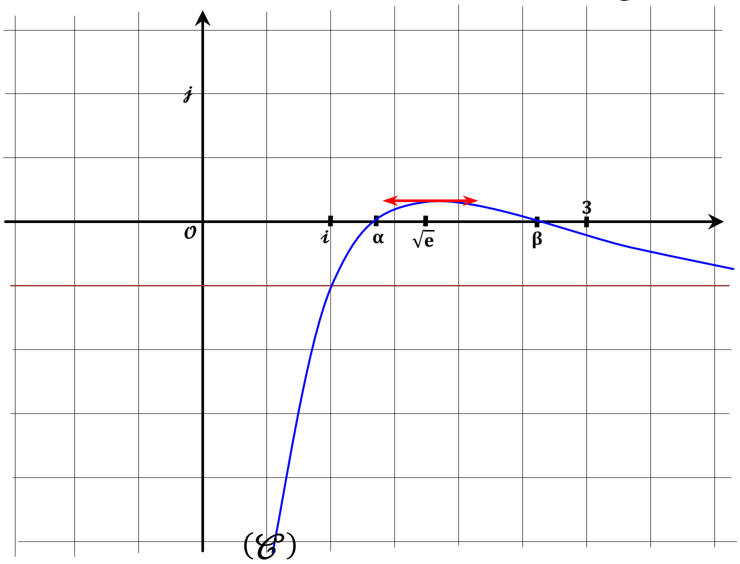
■ (I) ④

معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة ذات الأفصول 1 يكتب على شكل :

$$(T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$= 4(x-1)+\left(\frac{-1}{2}\right)$$
$$= 4x-\frac{9}{2}$$

و بالتالي : $(T): y = 4x - \frac{9}{2}$

■ (I) ⑤



■ (II) ①

ليكن $t \geq 0$ إذن : $-t^2 \leq 0$ ومنه : $1-t^2 \leq 1$

أي : $(1-t)(1+t) \leq 1$

نضرب كلا الطرفين في العدد الموجب $\left(\frac{1}{1+t}\right)$ نحصل على :

$$\boxed{1-t \leq \frac{1}{1+t}} \quad (1)$$

و لدينا كذلك $1+t \geq 1$ إذن : $\boxed{\frac{1}{1+t} \leq 1}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{\forall t \in [0;+\infty[\quad ; \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1}$$

■ (II) ②

ليكن a عنصرا من $[0;+\infty[$

لدينا : $\forall t \in [0;+\infty[\quad ; \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$

$$\Rightarrow \int_0^a (1-t)\,dt \leq \int_0^a \left(\frac{1}{1+t}\right)dt \leq \int_0^a 1\,dt$$

$$\Rightarrow \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^a \leq [\ln(1+t)]_0^a \leq [t]_0^a$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(a-\frac{a^2}{2}\right) \leq \ln(1+a) \leq a}$$

■ (III) ①

لدينا f_n دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$

لأنها تضم تركيبية من الدوال الاعتيادية القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$

$$f_n'(x)=n\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'=\frac{n(1-2\ln x)}{x^3}$$

بما أن : $\forall x>0\ ;\ \frac{n}{x^3}\geq 0$

فإن إشارة $f_n'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-2\ln x)$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f_n	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{n}{2e}-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$

■ (III) ②

دراسة التقعر و نقط الانعطاف يستدعي حساب المشتقة الثانية لـ f_n

$$f_n''(x)=\frac{x^3\left(\frac{-2n}{x}\right)-3x^2n(1-2\ln x)}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow\quad f_n''(x)=\frac{n(6\ln x-5)}{x^4}$$

إذن $f_n''(x)$ تنعدم إذا كان $(6\ln x-5)=0$

يعني : $\ln x=\frac{5}{6}$ أي : $x=e^{\frac{5}{6}}$

إذا كان $x>e^{\frac{5}{6}}$ فإن : $(6\ln x-5)>0$ و منه : $f''(x)>0$

إذا كان $x<e^{\frac{5}{6}}$ فإن : $(6\ln x-5)<0$ و منه : $f''(x)<0$

نلاحظ أن $f_n''(x)$ تنعدم في النقطة ذات الأفصول $e^{\frac{5}{6}}$ و تغير إشارتها بجوار تلك النقطة

إذن $(\mathscr{C}_n)$ يقبل نقطة انعطاف و هي : $\left(e^{\frac{5}{6}}\ ;\ \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}}-\frac{1}{2}\right)$

■ (III) ③ أ

لدينا : $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

إذا كان $x=0$ فإن $f_{n+1}(x)=f_n(x)$

إذا كان $x>1$ فإن $f_{n+1}(x)>f_n(x)$

إذا كان $x<1$ فإن $f_{n+1}(x)<f_n(x)$

■ (III) ③ ب

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$	‖ $-$	0	$+$
$(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$	$(\mathscr{C}_n)$ أسفل $(\mathscr{C}_{n+1})$	$(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$ يتقاطعان	$(\mathscr{C}_{n+1})$ فوق $(\mathscr{C}_n)$

■ (III) ④

لدينا f_n دالة تزايدية قطعا على $]0;\sqrt{e}[$

إذن f_n تقابل من أي مجال I ضمن $]0;\sqrt{e}[$ نحو صورته $f_n(I)$

و منه f_n تقابل من $]1;\sqrt{e}[$ نحو $]-0,5\,;0,2[$

و بما أن : $0\in]-0,5\,;0,2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا u_n من $]1\,;\sqrt{e}[$.

يعني : $\boxed{\exists!\ u_n\in]1;\sqrt{e}[\ \ ;\ \ f_n(u_n)=0}$ (1)

و بنفس الطريقة : لدينا f_n تناقصية قطعا على $]\sqrt{e}\,;+\infty[$

إذن f_n تقابل من أي مجال J ضمن $]\sqrt{e}\,;+\infty[$ نحو صورته $f_n(J)$

و منه : f_n تقابل من $]\sqrt{e}\,;n[$ نحو $]f_n(n)\,;0,2[$

و بما أن $0\in]f_n(n)\,;0,2[$ لأن $\frac{\ln n}{n}<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا v_n من $]\sqrt{e}\,;n[$

يعني : $\boxed{\exists!\ v_n>\sqrt{e}\ \ ;\ \ f_n(v_n)=0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين

u_n و v_n بحيث : $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$

■ (III) ⑤

لدينا : $1<u_n<\sqrt{e}$ إذن حسب (III)③ : $f_{n+1}(u_n)>f_n(u_n)$

و نعلم أن : $f_{n+1}(u_{n+1})=f_n(u_n)=0$

إذن : $f_{n+1}(u_n)>f_{n+1}(u_{n+1})$

و بما أن f_{n+1} دالة تزايدية على $]1\,;\sqrt{e}[$ فإن : $u_n>u_{n+1}$

و بالتالي : $(u_n)_{n\geq 4}$ متتالية تناقصية قطعا .

■ (III) ⑥ أ

لدينا : $\forall a\in[0\,;+\infty[\ ;\ a-\frac{a^2}{2}\leq\ln(1+a)\leq a$

و لدينا : $u_n>1$ إذن : $u_n-1>0$

و منه : $(u_n-1)-\frac{1}{2}(u_n-1)^2\leq\ln(u_n)\leq(u_n-1)$

$$\Leftrightarrow(\forall n\geq 4)\ ;\ \frac{2(u_n-1)-(u_n-1)^2}{2}\leq\ln(u_n)\leq(u_n-1)$$

$$\Leftrightarrow(\forall n\geq 4)\ ;\ \frac{(u_n-1)(2-u_{n+1})}{2}\leq\ln(u_n)\leq(u_n-1)$$

$$(*) \iff (\forall n \geq 4)\ ;\ \boxed{\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n-1)}$$

■ (III) 6 ب

ونعلم أن : $f_n(u_n) = 0$

$$\iff \frac{n\ln(u_n)}{(u_n)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\iff \ln(u_n) = \frac{(u_n)^2}{2n}$$

ننطلق إذن من الشق الأول من التأطير $(*)$: $\ln(u_n) \leq u_n - 1$

$$\iff \boxed{\frac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n - 1}\ (7)$$

و لدينا كذلك حسب الشق الثاني من التأطير $(*)$:

$$\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n)$$

$$\iff \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \frac{(u_n)^2}{2n}$$

$$\iff (u_n-1) \leq \frac{2(u_n)^2}{2n(3-u_n)}$$

$$\iff \boxed{(u_n-1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}}\ (8)$$

من (7) و (8) نحصل على التأطير (9) التالي :

$$(9)\ \boxed{(\forall n \geq 4)\ ;\ \frac{(u_n)^2}{2n} \leq (u_n-1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}}$$

■ (III) 6 ج

لدينا $u_n < \sqrt{e}$ إذن : $(10)\ \boxed{\frac{(u_n)^2}{2n} < \frac{e}{2n}}$

و $3 - u_n > 3 - \sqrt{e}$

إذن : $(11)\ \boxed{\frac{1}{3-u_n} < \frac{1}{3-\sqrt{e}} < 1}$

من (10) و (11) نستنتج أن : $\frac{(u_n)^2}{(3-u_n)} < e$

و منه : $(12)\ \boxed{\frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)} < \frac{e}{n}}$

من (9) و (10) و (12) نستنتج أن :

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{(u_n)^2}{2n} \leq (u_n-1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)} \leq \frac{e}{n}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \geq 4)\ ;\ \frac{1}{2n} \leq (u_n-1) \leq \frac{e}{n}}$

■ (III) 6 د

لدينا : $\frac{1}{2n} \leq (u_n-1) \leq \frac{e}{n}$

$$\frac{1}{2n} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \qquad \frac{e}{n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

إذن : $\lim\limits_{n\infty}(u_n-1) = 0$ أي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty} u_n = 1}$

■ (III) 7 أ

لدينا : $n \geq 4$

$$\implies \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}} \geq \frac{20}{6}e^{\frac{-5}{3}}$$

باستعمال الآلة الحاسبة لدينا : $\frac{20}{6}e^{\frac{-5}{3}} \approx 0{,}63 > 0{,}5$

$$\implies \frac{20}{6}e^{\frac{-5}{3}} > \frac{1}{2}$$

$$\implies \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\implies \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}} - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\implies f_n\left(e^{\frac{5}{6}}\right) \geq f_n(v_n)$$

و بما أن f_n دالة تناقصية على المجال $]\sqrt{e}\ ;\ +\infty[$

فإن : $\boxed{e^{\frac{5}{6}} \leq v_n}$

■ (III) 7 ب

لدينا : $f_n(v_n) = 0$

$$\iff \frac{n\ln(v_n)}{(v_n)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\iff \boxed{\ln(v_n) = \frac{(v_n)^2}{2n}}\ (*)$$

و لدينا : $v_n > e^{\frac{5}{6}}$ إذن : $\ln(v_n) > \frac{5}{6}$

و منه باستعمال $(*)$ نجد : $\frac{(v_n)^2}{2n} > \frac{5}{6}$

$$\iff (v_n)^2 > \frac{10}{6}n$$

$$\iff v_n > \sqrt{\frac{10n}{6}}$$

بما أن : $\lim\limits_{n\infty} \sqrt{\frac{10n}{6}} = +\infty$

فإن : $\boxed{\lim\limits_{n\infty} v_n = +\infty}$