استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

لدينا صندوقان U و V . الصندوق U يحتوي على 4 كرات حمراء و 4 كرات زرقاء. الصندوق V يحتوي على كرتين حمراوين و 4 كرات زرقاء.

نعتبر التجربة العشوائية التالية : " نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U : إذا كانت حمراء نضعها في الصندوق V ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V . و إذا كانت زرقاء نضعها جانبا ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V " .

نعتبر الأحداث التالية :

- R_1 : " الكرة المسحوبة من U حمراء " .
- B_1 : " الكرة المسحوبة من U زرقاء ".
- R_2 : " الكرة المسحوبة من V حمراء "
- B_2 : " الكرة المسحوبة من V زرقاء " .

① أحسب احتمال الحدثين R_1 و B_1 . — 1,00 ن

② أحسب احتمال B_2 علما أن R_1 محقق، و احتمال B_2 علما أن B_1 محقق. — 1,00 ن

③ بين أن : $P(B_2) = \frac{13}{21}$ — 0,50 ن

④ استنتج $P(R_2)$. — 0,50 ن

التمرين الثاني : (4,5 ن)

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث : $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و نضع : $p = 5\cos\theta + 3i\sin\theta$

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية : $\boxed{(E):\ z^2 - 2pz + 16 = 0}$

① (أ) تحقق أن : $p^2 - (3\cos\theta + 5i\sin\theta)^2 = 16$ — 0,50 ن

(ب) أوجد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث : $|z_1| < |z_2|$ — 0,50 ن

② المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاهما على التوالي هما : z_1 و z_2 .

(أ) بين أنه عندما يتغير العدد θ في $[0; 2\pi[$ فإن النقطة M_1 تتغير على دائرة $(\mathscr{C})$ ينبغي تحديد معادلة لها. — 0,50 ن

(ب) لتكن P منتصف القطعة $[M_1M_2]$. و لتكن (Γ) مجموعة النقط P عندما يتغير العدد θ في المجال $[0; 2\pi[$ — 0,50 ن

بين أن (Γ) إهليلج بؤرتاه هما النقطتان F و F' اللتان لحقاهما على التوالي هما 4 و -4 .

0,50 ن	③ⓐ بين أنه لكل عددين عقديين a و b من $\mathbb{C}\setminus\{4\}$ لدينا : $(ab=16) \Leftrightarrow \left(\frac{b+4}{b-4}\right) = -\left(\frac{a+4}{a-4}\right)$
0,50 ن	ⓑ استنتج أن : $\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)$
0,50 ن	ⓒ بين أن : $\left(\overrightarrow{M_1F};\overrightarrow{M_1F'}\right) \equiv \pi + \left(\left(\overrightarrow{M_2F};\overrightarrow{M_2F'}\right)\right)[2\pi]$
0,50 ن	④ⓐ بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي : $3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$
0,50 ن	ⓑ بين أن : المماس (T) عمودي على المستقيم (M_1M_2) .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

لكل زوج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ نعتبر المصفوفة : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$

في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لتكن E مجموعة المصفوفات المعرفة بما يلي : $\boxed{E = \left\{M_{(a,b)} \ / \ a^2 - 2b^2 = 1\right\}}$

0,25 ن	① نضع : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ تحقق أن : $A \in E$
0,50 ن	②ⓐ بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ و أن القانون $\times$ تبادلي في E .
0,50 ن	ⓑ بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي $\times$.
0,50 ن	ⓒ بين أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية .
	③ نضع : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A^{n+1} = A^n \times A$; $(\forall n \in \mathbb{N})$
	نعتبر المجموعة $\boxed{G = \{A^n \ / \ n \in \mathbb{N}\}}$
0,25 ن	ⓐ تحقق أن : $G \subset E$
0,50 ن	ⓑ لتكن H مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة لعملية $\times$ في E .
	بين أن : $H = \{B^n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ حيث : $B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$
0,50 ن	ⓒ بين أن : $G \cup H$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

التمرين الرابع : (9,5 ن)

(I) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{g_n(x) = x + e^{-nx}}$

و ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة g_n في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

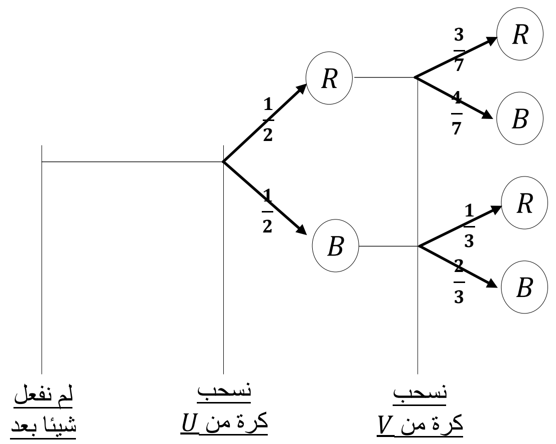
0,50 ن	①ⓐ أدرس تغيرات الدالة g_n .
0,50 ن	ⓑ بين أن g_n تقبل قيمة دنيا عند عدد حقيقي u_n يتم تحديده بدلالة n .
0,50 ن	②ⓐ أحسب : $\lim_{x\to-\infty} g_n(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g_n(x)$

0,50 ن	ب) حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$
0,50 ن	3) أ) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ الممثلين للدالتين g_1 و g_2
0,50 ن	ب) أرسم في نفس المعلم المنحنيين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$.
	(نأخذ : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2\ cm$ و نعطي : $\ln 2 \approx 0{,}7$)
1,00 ن	4) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب بدلالة x التكامل : $I(x) = \int_0^x te^{-2t}\,dt$
0,50 ن	ب) لتكن h_2 قصور الدالة g_2 على المجال $[0, \ln 2]$
	أحسب حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المبياني لـ h_2 حول محور الأفاصيل.
1,00 ن	5) نضع : $v_n = g_n(u_n)$
	بين أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربتان و حدد نهايتيهما.
	(II) نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f_n(x) = x + e^{nx}}$
	و ليكن (Γ_n) منحنى الدالة f_n في معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$
0,50 ن	1) أدرس تغيرات الدالة f_n .
0,50 ن	2) إستنتج أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n
0,50 ن	3) أ) بين أن $\alpha_1 \in \left]-\ln 2\,;\,\frac{-1}{2}\right[$
0,50 ن	ب) بين أن : $(x - \alpha_1)$ و $(e^x + \alpha_1)$ لهما نفس الإشارة.
0,50 ن	4) أ) لتكن φ الدالة العددية المعرفة على $\left]-\infty\,;\,\frac{-1}{2}\right]$ بما يلي : $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$
	بين أن الدالة φ تناقصية على المجال $\left]-\infty\,;\,\frac{-1}{2}\right]$
0,50 ن	ب) استنتج أن : $\|e^x + \alpha_1\| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}\|x - \alpha_1\|$
	5) نضع : $\beta_0 = \frac{-1}{2}$ و لكل عدد صحيح طبيعي n : $\beta_{n+1} = -e^{\beta_n}$
0,50 ن	أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي a بحيث : $(\forall n\in\mathbb{N}) : \|\beta_{n+1} - \alpha_1\| \leq a\|\beta_n - \alpha_1\|$
0,50 ن	ب) بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ ①

النموذج الأمثل لحل هذا التمرين هو استعمال شجرة الإحتمالات التالية :



لدينا حسب الشجرة : $P(R_1) = P(B_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

■ ②

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P_{R_1}(B_2) = \frac{P(R_1 \cap B_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$$

■ ③

لدينا : $P(B_2) = P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2)$

$$= P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{13}{21}$$

■ ④

الطريقة الأولى : استعمال تقنية الحدث المؤكد

$$P(B_2) + P(R_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad P(R_2) = 1 - P(B_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(R_2) = 1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21}$$

الطريقة الثانية : (استعمال الشجرة)

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(R_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(R_2) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{21}$$

التمرين الثاني : (4,5 ن)

■ ① أ

لدينا : $p^2 - (3\,cos\theta + 5i\,sin\theta)^2$

$$= (5cos\theta + 3isin\theta)^2 - (3\,cos\theta + 5i\,sin\theta)^2$$

$$= 25\cos^2\theta - 9\sin^2\theta - 9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta$$

$$= 25(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 9(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= 25 - 9$$

$$= 16$$

■ ① ب

لدينا : $\Delta' = p^2 - 16 = (3cos\theta + 5i\,sin\theta)^2$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين في $\mathbb{C}$.

$$z_1 = p + (3cos\theta + 5i\,sin\theta) = 2e^{-i\theta}$$

$$z_2 = p - (3cos\theta + 5i\,sin\theta) = 8e^{i\theta}$$

■ ② أ

ليكن θ عنصرا من $[0; 2\pi[$.

نضع : $aff(M_1) = 2e^{-i\theta} = x + iy$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(-\theta) + 2i\sin(-\theta) = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\cos(\theta) = x \\ -2\sin(\theta) = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = (2\cos(\theta))^2 + (-2\sin(\theta))^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2^2$$

إذن : $M_1\binom{x}{y}$ تنتمي إلى الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها O و شعاعها 2 .

■ ② ب

لدينا P هي منتصف القطعة $[M_1M_2]$

$$\Leftrightarrow \quad aff(P) = \frac{aff(M_1) + aff(M_2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad aff(P) = \frac{2e^{-i\theta} + 8e^{i\theta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad aff(P) = (cos\theta - i\,sin\theta) + 4(cos\theta + i\,sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad aff(P) = 5\,cos\theta + 3i\,sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad aff(P) = p$$

نضع : $p = x + iy$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5\cos(\theta) \\ y = 3\,sin(\theta) \end{cases}$$

لدينا حسب نتيجة السؤال ① أ : $p^2 - (3cos\theta + 5i\,sin\theta)^2 = 16$

$$\Leftrightarrow \quad (x+iy)^2 - \left(\frac{3x}{5} + \frac{5i}{3}y\right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{9}y^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

إذن عندما يتغير العدد θ في المجال $[0;2\pi[$

فإن النقطة P تتغير على الإهليلج (Γ) الذي مركزه O

و رؤوسه : $A(5,0)$ و $A'(-5,0)$ و $B(0,3)$ و $B'(0,-3)$.

و بؤرتاه : $F(4,0)$ و $F'(-4,0)$.

(لأن : $c = 4 \;\Rightarrow\; c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9$)

■ ③ أ

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{C}\setminus\{4\}$ بحيث: $\left(\frac{b+4}{b-4}\right) = -\left(\frac{a+4}{a-4}\right)$.

$$\Leftrightarrow \quad (b+4)(4-a) = (b-4)(a+4)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ab = 32$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{ab = 16}$$

■ ③ ب

لدينا : $z_1 = 2e^{-i\theta} \neq 4$ و $z_2 = 8e^{i\theta} \neq 4$.

إذن : $z_1 z_2 = 16e^{i\theta}e^{-i\theta} = 16$

و منه حسب ③ أ : $\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)$.

■ ③ ج

ننطلق من الكتابة : $\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)$.

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{4-z_1}{-4-z_1}\right) = -\left(\frac{4-z_2}{-4-z_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{z_F - z_1}{z_{F'} - z_1}\right) = -\left(\frac{z_F - z_2}{z_{F'} - z_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad arg\left(\frac{z_F - z_1}{z_{F'} - z_1}\right) \equiv \pi + arg\left(\frac{z_F - z_2}{z_{F'} - z_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left(\overrightarrow{M_1F}\,;\,\overrightarrow{M_1F'}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{M_2F}\,;\,\overrightarrow{M_2F'}\right)\,[2\pi]}$$

■ ④ أ

لدينا : $P(5\,cos\theta\,;3\sin\theta)$

إذن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي :

$$(T):\ \frac{5x\,cos\theta}{5^2} + \frac{3y\,sin\theta}{3^2} = 1$$

$$\boxed{(T):\ 3x\,cos\theta + 5y\,sin\theta = 15}$$

■ ④ ب

لدينا : $(\mathrm{T}): 3x\,cos\theta + 5y\,sin\theta = 15$

$$(T):\ y = \left(\frac{-3\,cos\theta}{5\sin\theta}\right)x + \left(\frac{3}{\sin\theta}\right)$$

$$\boxed{\text{إذن : ميل المستقيم } (T) \text{ هو } : \left(\frac{-3\,cos\theta}{5\,sin\theta}\right).}$$

لنحسب الآن m ميل المستقيم (M_1M_2) .

لدينا : $M_1\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ -2\sin\theta \end{pmatrix}$ و $M_2\begin{pmatrix} 8\cos\theta \\ 8\sin\theta \end{pmatrix}$.

إذن : $m = \dfrac{8\,sin\theta - (-2sin\theta)}{8cos\theta - 2cos\theta} = \left(\dfrac{5\,sin\theta}{3\,cos\theta}\right)$

$$\boxed{\text{إذن ميل المستقيم } (M_1M_2) \text{ هو } \left(\frac{5\,sin\theta}{3\,cos\theta}\right).}$$

و بالتالي : (T) و (M_1M_2) متعامدان لأن جداء ميليهما يساوي (-1) .

$$\boxed{\left(\frac{-3\,cos\theta}{5\,sin\theta}\right) \times \left(\frac{5\,sin\theta}{3\,cos\theta}\right) = -1}$$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ①

نضع : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

لدينا : $3^2 - 2\times 2^2 = 1$

إذن : $A = M(3,2)\,\epsilon\ \ E$

■ ② أ

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا : $M(a,b)\times M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d\sqrt{2} \\ d\sqrt{2} & c \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad M(a,b)\times M(c,d) = \begin{pmatrix} ac+2bd & (bc+ad)\sqrt{2} \\ (bc+ad)\sqrt{2} & ac+2bd \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{M(a,b)\times M(c,d) = M(ac+2bd\,;\,ad+bc)}\,(*)$$

و لدينا :
$$(ac+2bd)^2-2(bc+ad)^2$$
$$=(ac)^2+4(bd)^2-2(bc)^2-2(ad)^2$$
$$=c^2\underbrace{(a^2-2b^2)}_{1}+2d^2\underbrace{(2b^2-a^2)}_{-1}$$
$$=c^2-2d^2$$
$$=1$$

إذن : $M(ac+2bd\,;bc+ad)\ \epsilon\ E$

و بالتالي : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

بالإستعانة بالعلاقة $(*)$ لدينا :

$$M(a,b)\times M(c,d)=M(ac+2bd\ ;\ ad+bc)$$
$$=M(ca+2db\ ;\ cb+da)$$
$$=M(c,d)\times M(a,b)$$

إذن القانون $\times$ تبادلي في E .

■ 2 ب

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E

لدينا :
$$(M(a,b))^{-1}=\frac{1}{detM\,(a,b)}\begin{pmatrix}a & -b\sqrt{2}\\ -b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{(a^2-2b^2)}\begin{pmatrix}a & -b\sqrt{2}\\ -b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a & -b\sqrt{2}\\ -b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}=M(a,-b)\ \epsilon\ E$$

و بالتالي : مقلوب كل مصفوفة $M(a,b)$ هو المصفوفة $M(a,-b)$

بتعبير آخر : $\boxed{(M(a,b))^{-1}=M(a,-b)}$

■ 2 ج

لدينا حسب الأسئلة السابقة :

$\times$ قانون تركيب داخلي في المجموعة E لأن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

و بما أن $\times$ تجميعي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن $\times$ تجميعي كذلك في E .

و بما أن المصفوفة $I=M(1,0)$ هي العنصر المحايد لـ $\times$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن $I=M(1,0)$ هو العنصر المحايد لـ $\times$ في E

و ذلك لأن العنصر المحايد إن وجد فإنه يكون دائما وحيدا.

توصلنا كذلك إلى أن كل عنصر $M(a,b)$ يقبل مماثلا و هو $M(a,-b)$

نستنتج إذن أن $(E,\times)$ زمرة.

و بما أن $\times$ تبادلي في E .

فإن $(E,\times)$ زمرة تبادلية.

■ 3 أ

ليكن X عنصرا من G .

إذن : $(\exists m\epsilon\mathbb{N})\ ;\ X=A^m$

نريد أن نبرهن على أن $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ A^n\,\epsilon\,E$

لدينا من أجل $n=0$: $A^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=M(1,0)\ \epsilon\ E$

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ A^n\ \epsilon\ E$

لدينا : $A^n\ \epsilon\ E$ و $A\ \epsilon\ E$

إذن $A^n\times A\ \epsilon\ E$

لأن $\times$ قانون داخلي في E .

إذن : $A^{n+1}\ \epsilon\ E$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ A^n\ \epsilon\ E}$

و منه : $X=A^m\ \epsilon\ E$

خلاصة القول : $\boxed{G\subset E}$

■ 3 ب

للإجابة على هذا السؤال يكفي أن نبين أن : $(A^n)^{-1}=B^n$

من أجل $n=0$ لدينا : $(A^0)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=B^0$

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ (A^n)^{-1}=B^n$

لدينا :
$$(A^{n+1})^{-1}=(A^n\times A)^{-1}$$
$$=A^{-1}\times(A^n)^{-1}$$
$$=B\times B^n$$
$$=B^{n+1}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ (A^n)^{-1}=B^n}$

■ 3 ج

لنبرهن في البداية على الخاصية $(\#)$ التالية :

$$(\#)\quad\boxed{\forall(m,n)\ \epsilon\ \mathbb{N}^2\ \ ;\ \ A^m\times B^n\ \ \epsilon\ \ G\cup H}$$

ليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين

نفصل هنا بين حالتين أساسيتين :

<u>الحالة الأولى</u> : إذا كان $m\geq n$:

لدينا :
$$A^m\times B^n=A^{m-n}\times(A\times B)^n$$
$$=A^{m-n}\times I$$
$$=A^{m-n}\ \epsilon\ G\subset G\cup H$$

إذن : $\boxed{A^m \times B^n \ \epsilon \ G \cup H}$

الحالة الثانية : إذا كان $m \leq n$:

لدينا :
$$\begin{aligned} A^m \times B^n &= (A \times B)^m \times B^{n-m} \\ &= I \times B^{n-m} \\ &= B^{n-m} \ \epsilon \ H \subset G \cup H \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{A^m \times B^n \ \epsilon \ G \cup H}$

و بالتالي : $\boxed{\forall (m,n) \ \epsilon \ \mathbb{N}^2 \quad ; \quad A^m \times B^n \ \epsilon \ G \cup H}$ $(\sharp)$

نستغل إذن هذه الخاصية الثمينة للإجابة على السؤال (ج) :

من الواضح أن $G \cup H$ جزء غير فارغ من E لأن : $(G,H) \subset E^2$

لتكن X و Y مصفوفتين من $G \cup H$ و نفصل بين أربع حالات أساسية :

الحالة الأولى : إذا كان $X \epsilon G$ و $Y \epsilon G$:

إذن : $\exists (m,n) \ \epsilon \ \mathbb{N}^2 \ ; \ X = A^n$ و $Y = A^m$

و منه : $X \times Y^{-1} = A^n \times (A^m)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = A^n \times B^m$

إذن : $A^n \times B^m \ \epsilon \ G \cup H$ و ذلك حسب خاصيتنا الثمينة $(\sharp)$.

و منه : $\boxed{X \times Y^{-1} \ \epsilon \ G \cup H}$

الحالة الثانية : إذا كان $X \epsilon H$ و $Y \epsilon H$:

إذن : $\exists (m,n) \ \epsilon \ \mathbb{N}^2 \ ; \ X = B^n$ و $Y = B^m$

و منه : $X \times Y^{-1} = B^n \times (B^m)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = B^n \times A^m$

إذن : $B^n \times A^m \ \epsilon \ G \cup H$ و ذلك حسب خاصيتنا الثمينة $(\sharp)$.

و منه : $\boxed{X \times Y^{-1} \ \epsilon \ G \cup H}$

الحالة الثالثة : إذا كان $X \epsilon G$ و $Y \epsilon H$:

إذن : $\exists (m,n) \ \epsilon \ \mathbb{N}^2 \ ; \ X = A^n$ و $Y = B^m$

و منه : $X \times Y^{-1} = A^n \times (B^m)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = A^n \times A^m = A^{m+n} \ \epsilon \ G \subset G \cup H$

و منه : $\boxed{X \times Y^{-1} \ \epsilon \ G \cup H}$

الحالة الرابعة : إذا كان $X \epsilon H$ و $Y \epsilon G$:

إذن : $\exists (m,n) \ \epsilon \ \mathbb{N}^2 \ ; \ X = B^n$ و $Y = A^m$

و منه :
$$\begin{aligned} X \times Y^{-1} &= B^n \times (A^m)^{-1} \\ &= B^n \times B^m \\ &= B^{m+n} \ \epsilon \ H \subset G \cup H \end{aligned}$$

و منه : $\boxed{X \times Y^{-1} \ \epsilon \ G \cup H}$

خلاصة القول : نلاحظ أنه في جميع هذه الحالات الأربع نجد:

$$\boxed{(\forall \, X,Y \ \epsilon \ G \cup H) \quad ; \quad X \times Y^{-1} \ \epsilon \ G \cup H}$$

و بالتالي : $G \cup H$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

التمرين الرابع : (9,5 ن)

■ (1)(أ)

لدينا : $g_n(x) = x + e^{-nx}$

إذن g_n قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

لأنها مجموع دالتين اعتياديتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

و لدينا : $g_n'(x) = 1 - ne^{-nx} = e^{-nx}(e^{nx} - n)$

بما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}), (\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ e^{-nx} > 0$

فإن إشارة $g_n'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(e^{nx} - n)$

إذا كان $x = \frac{\ln n}{n}$ فإن : $g_n'(x) = 0$

إذا كان $x > \frac{\ln n}{n}$ فإن : $g_n'(x) > 0$ يعني g_n تزايدية

إذا كان $x < \frac{\ln n}{n}$ فإن : $g_n'(x) < 0$ يعني g_n تناقصية

■ (1)(ب)

لدينا الدالة g_n متصلة على $\mathbb{R}$.

و تناقصية على $\left]-\infty \, ; \frac{\ln n}{n}\right[$.

و تزايدية على $\left]\frac{\ln n}{n} \, ; +\infty\right[$

و تنعدم في $\frac{\ln n}{n}$

إذن g_n تقبل قيمة دنوية عند $u_n = \frac{\ln n}{n}$ و هذه القيمة هي
$g_n(u_n) = \frac{1+\ln n}{n}$

■ 2 أ

$$\lim_{x\to-\infty} g_n(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+e^{-nx})$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{n}{nxe^{nx}}\right)$$
$$= (-\infty)\left(1+\frac{n}{0^-}\right)$$
$$= (-\infty)(-\infty)$$
$$= (+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+e^{-nx})$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{n}{nxe^{nx}}\right)$$
$$= (+\infty)\left(1+\frac{n}{(+\infty)}\right)$$
$$= (+\infty)(1)$$
$$= (+\infty)$$

■ 2 ب

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{n}{nxe^{nx}}\right)$

$$= \left(1+\frac{n}{+\infty}\right)$$
$$= 1$$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} (g_n(x)-1x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-nx} = 0$

إذن المنصف الأول للمعلم $y=x$ مقارب مائل لِـ $(\mathscr{C}_n)$ بجوار $(+\infty)$.

و لدينا من جهة أخرى : $\lim_{x\to-\infty} g_n(x) = +\infty$

و $\lim_{x\to-\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{n}{nxe^{nx}}\right) = (-\infty)$

إذن : $(\mathscr{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب.

■ 3 أ

لدراسة الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$

ندرس إشارة الفرق : $g_1(x)-g_2(x)$

لدينا : $g_1(x)-g_2(x) = (x+e^{-x})-(x+e^{-2x})$

$$= e^{-x}-e^{-2x}$$
$$= e^{-x}(1-e^{-x})$$

بما أن : $e^{-x}>0\ ;\ (\forall x\epsilon\mathbb{R})$ فإن إشارة الفرق $g_1(x)-g_2(x)$

متعلقة فقط بإشارة $(1-e^{-x})$ و نفصل هنا بين ثلاث حالات :

<u>الحالة الأولى</u> : إذا كان $x=0$

فإن : $(1-e^{-x})=0$ و منه $g_1(x)=g_2(x)$:

إذن: $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ يتقاطعان في النقطة $(0,1)$.

<u>الحالة الثانية</u> : إذا كان $x>0$

فإن : $(1-e^{-x})>0$ و منه $g_1(x)>g_2(x)$:

إذن : $(\mathscr{C}_1)$ يوجد فوق $(\mathscr{C}_2)$

<u>الحالة الثالثة</u> : إذا كان $x<0$

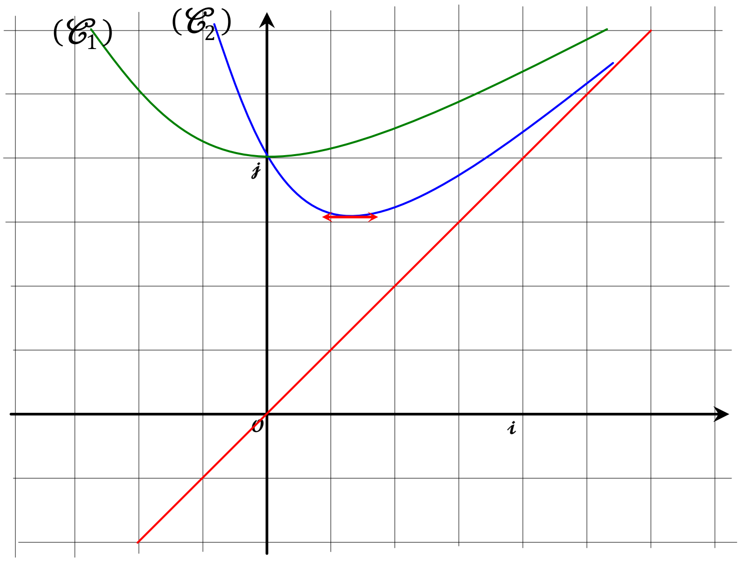
فإن : $(1-e^{-x})<0$ و منه $g_1(x)<g_2(x)$:

إذن : $(\mathscr{C}_1)$ يوجد أسفل $(\mathscr{C}_2)$

<u>خلاصة :</u>

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_1(x)-g_2(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي لـ$(\mathscr{C}_1)$ و$(\mathscr{C}_2)$	$(\mathscr{C}_2)$ فوق $(\mathscr{C}_1)$	$(\mathscr{C}_1)(\mathscr{C}_2)$ يتقاطعان في $(0,1)$	$(\mathscr{C}_1)$ فوق $(\mathscr{C}_2)$

■ 3 ب



■ 4 أ

$$I(x) = \int_0^x \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{e^{-2t}}_{v'}\,dt$$

$$\Leftrightarrow\quad I(x) = \left[\frac{-te^{-2t}}{2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\,dt$$

$$\Leftrightarrow\quad I(x) = \left[\frac{-te^{-2t}}{2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-2t}}{2}\right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow\quad I(x) = \frac{-xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{-e^{-2x}}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{I(x) = \frac{-e^{-2x}}{4}\left(2x + 1 - e^{2x}\right)}$$

■ (4)(ب)

لدينا : $\forall\, x \in [0; \ln 2] \;\; ; \;\; h_2(x) = x + e^{-2x}$

إذن h_2 متصلة على المجال : $[0; \ln 2]$

و $\forall\, x \in [0; \ln 2] \;\; ; \;\; h_2(x) > 0$

إذن حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المبياني لـ h_2 حول محور الأفاصيل هو :

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} \left(h_2(x)\right)^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \pi \int_0^{\ln 2} \left(x + e^{-2x}\right)^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \pi \int_0^{\ln 2} \left(x^2 + e^{-4x} + 2xe^{-2x}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \pi \left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ln 2} + \left[\frac{-e^{-4x}}{4}\right]_0^{\ln 2} + 2I(\ln 2) \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{V = \pi \left(\frac{(\ln 2)^3}{3} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{39}{64} \right)}$$

■ (5)

لدينا حسب نتيجة السؤال (1)(ب) :

$$u_n = \frac{\ln n}{n} \quad \text{و} \quad v_n = g_n(u_n) = \left(\frac{1 + \ln n}{n}\right)$$

و لدينا : $\lim_{n\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0$ و $\lim_{n\infty} \left(\frac{1 + \ln n}{n}\right) = 0$

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتان متقاربتان و تؤولان معا إلى الصفر.

■ (II)(1)

لدينا : $f_n(x) = x + e^{nx}$

إذن $f_n'(x) = 1 + ne^{nx} > 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
f_n	$-\infty \nearrow +\infty$

■ (II)(2)

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_n :

f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

إذن f_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

و بما أن : 0 عدد حقيقي فإنه يقبل سابقا واحدا α_n بالتقابل f_n

بتعبير آخر : $\boxed{\exists!\; \alpha_n \in \mathbb{R} \;\; ; \;\; f_n(\alpha_n) = 0}$

■ (II)(3)(أ)

بما أن f_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

فإن f_n تقابل من أي مجال I من $\mathbb{R}$ نحو صورته $f_n(I)$.

نأخذ المجال $\left]-\ln 2 \,;\, \frac{-1}{2}\right[$ و نقول من أجل $n = 1$:

f_1 تقابل من $\left]-\ln 2 \,;\, \frac{-1}{2}\right[$ نحو صورته $\left]\frac{1}{2} - \ln 2 \,;\, \frac{-1}{2} + e^{\frac{-1}{2}}\right[$

و باستعمال القيم المقربة نحصل على :

f_1 تقابل من $\left]-\ln 2 \,;\, \frac{-1}{2}\right[$ نحو $]-0{,}2 \,;\, 0{,}1[$

وبما أن $0 \in]-0{,}2 \,;\, 0{,}1[$ فإنه يمتلك سابقا واحدا α_1 من $\left]-\ln 2 \,;\, \frac{-1}{2}\right[$

يعني : $\boxed{\exists!\; \alpha_1 \in \left]-\ln 2 \,;\, \frac{-1}{2}\right[\;\; ; \;\; f_1(\alpha_1) = 0}$

■ (II)(3)(ب)

لدينا $f_1(\alpha_1) = 0$ إذن : $(\alpha_1 + e^{\alpha_1}) = 0$ و منه : $\boxed{-\alpha_1 = e^{\alpha_1}}$

<u>الحالة الأولى</u> : إذا كان $(x - \alpha_1) > 0$

فإن : $x > \alpha_1$ و منه $e^x > e^{\alpha_1}$

يعني : $e^x > -\alpha_1$ إذن : $\boxed{(e^x + \alpha_1) > 0}$

<u>الحالة الثانية</u> : إذا كان $(x - \alpha_1) < 0$

فإن : $x < \alpha_1$ و منه $e^x < e^{\alpha_1}$

يعني : $e^x < -\alpha_1$ إذن : $(e^x + \alpha_1) < 0$

نستنتج من هاتين الحالتين أن الكميتين $(x - \alpha_1)$ و $(e^x + \alpha_1)$ لهما نفس الإشارة .

■ (II)(4)(أ)

لدينا : $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

إذن : $\varphi'(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}$

من أجل : $x \leq \frac{-1}{2}$

لدينا : $e^x \leq e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

و منه : $e^x - \frac{1}{\sqrt{e}} \leq 0$

أي : $\forall\, x \in \left]-\infty \,;\, \frac{-1}{2}\right] \;\; ; \;\; \varphi'(x) \leq 0$

و بالتالي : $\boxed{\varphi \text{ دالة تناقصية على المجال } \left]-\infty \,;\, \frac{-1}{2}\right]}$

■(II)(4)(ب)

نعلم أن الدالة Exp قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن نستطيع تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال من $\mathbb{R}$.

نختار المجال الذي طرفاه α_1 و x بحيث : $x \in \left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right[$

إذن يوجد c محصور بين α_1 و x بحيث :

$$\frac{e^x - e^{\alpha_1}}{x-\alpha_1} = e^c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x + \alpha_1}{x - \alpha_1} = e^c$$

و بما أن $(e^x + \alpha_1)$ و $(x - \alpha_1)$ لهما نفس الإشارة فإن :

$$\Rightarrow \quad \frac{|e^x + \alpha_1|}{|x - \alpha_1|} = e^c$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{|e^x + \alpha_1| = e^c |x - \alpha_1|} \quad (*)$$

من جهة أخرى لدينا : $c \in \left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right[$ إذن : $c < \frac{-1}{2}$

و منه : $e^c < \frac{1}{\sqrt{e}}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|x - \alpha_1|$ نحصل على :

$$\boxed{e^c |x - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|} \quad (**)$$

من النتيجتين $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن :

$$\boxed{\forall x \in \left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right] \; ; \quad |e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|}$$

■(II)(5)(أ)

في البداية يجب أن نبرهن على أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \; : \; \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$$

من أجل : $n = 0$ لدينا : $\frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_0 = \frac{-1}{2} \leq \frac{-1}{2}$

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; : \; \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$

إذن : $e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}} \leq e^{\beta_n} \leq e^{\frac{-1}{2}}$

و منه : $\frac{-1}{\sqrt{e}} \leq -e^{\beta_n} \leq -e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}}$

بالاستعانة بالآلة الحاسبة نجد : $-e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}} \approx -0{,}54 < \frac{-1}{2}$

إذن : $\frac{-1}{\sqrt{e}} \leq -e^{\beta_n} \leq \frac{-1}{2}$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; : \; \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_{n+1} \leq \frac{-1}{2}$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \; : \; \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}}$

ما يهمنا في هذا التأطير هو الشق : $\boxed{\beta_n \leq \frac{-1}{2}} \; (\star)$

و ذلك من أجل تطبيق نتيجة السؤال (ب)

لدينا حسب نتيجة السؤال (ب) :

$$\forall x \in \left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right] \; ; \quad |e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$$

إذن من أجل : $x = \beta_n$ المنتمي إلى $\left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right]$ حسب $(\star)$ نجد :

$$|e^{\beta_n} + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|$$

$$\Leftrightarrow \quad |-e^{\beta_n} - \alpha_1| = |e^{\beta_n} + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{|\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|} \quad (777)$$

و بالتالي : $\left(\exists a = \frac{1}{\sqrt{e}} \in \mathbb{R}\right) \; |\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq a |\beta_n - \alpha_1|$

لدينا باستعمال النتيجة (777) :

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad |\beta_n - \alpha_1| &\leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_{n-1} - \alpha_1| \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 |\beta_{n-2} - \alpha_1| \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^3 |\beta_{n-3} - \alpha_1| \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n |\beta_0 - \alpha_1|
\end{aligned}$$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{-1}{2} - \alpha_1\right|$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right|$$

بما أن $\alpha_1 < 0$ فإن : $\left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right| < \frac{1}{2}$

و منه : $(1111) \quad \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}}$

نلاحظ أن : $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}$ متتالية هندسية أساسها العدد الموجب $\frac{1}{\sqrt{e}}$ و الأصغر من 1 :

إذن : $\lim_{n\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} = 0$

و منه حسب التأطير (1111) نستنتج أن : $\lim_{n\infty} |\beta_n - \alpha_1| = 0$

أي : $\boxed{\lim_{n\infty} \beta_n = \alpha_1}$