



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,5 ن)

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و 10 كرات حمراء لا يمكن التمييز بينها باللمس، نسحب عشوائيا كرة من الكيس . إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نعيدها إلى الكيس و إذا كانت بيضاء نضع بدلها 3 كرات حمراء في الكيس ثم نسحب كرة من الكيس.

- ① أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين. 0,50 ن
- ② أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين. 0,50 ن
- ③ أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين. 0,75 ن
- ④ أحسب الإحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء علما أن الكرة الثانية المسحوبة بيضاء. 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

① حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(E) : 3x - 2y = 1$. 0,75 ن

② ليكن $n \in \mathbb{N}$.

أ) بين أن : $(4 + 21n, 3 + 14n)$ حل للمعادلة (E) . 0,25 ن

ب) استنتج أن العددين $(3 + 14n)$ و $(4 + 21n)$ أوليان فيما بينهما. 0,50 ن

③ ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين $(2n + 1)$ و $(21n + 4)$.

أ) بين أن : $d = 1$ أو $d = 13$. 0,50 ن

ب) بين أن : $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6[13]$. 0,25 ن

④ من أجل كل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ نضع :

$$A = 21n^2 - 17n - 4 \quad \text{و} \quad B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$$

أ) بين أن العددين A و B قابلين للقسمة على $(n - 1)$ في المجموعة \mathbb{Z} . 0,25 ن

ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر لـ A و B . 0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v})

① ليكن a عددا عقديا غير منعدم مكتوب في شكله الجبري التالي : $a = \alpha + i\beta$.

لتكن (\mathcal{H}) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2$.

① حدد طبيعة (\mathcal{H}) .

0,50 ن

② أنشئ (\mathcal{H}) في الحالة : $a = 1 + i$.

0,50 ن

② لتكن (\mathcal{E}) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a}$

① حدد طبيعة (\mathcal{E}) .

0,75 ن

② أنشئ (\mathcal{E}) في الحالة : $a = 1 + i$.

0,25 ن

③ نعتبر في المجموعة \mathbb{C} النظمة التالية :
 $(S) : \begin{cases} z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2 \\ (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$

نضع : $u = z - a$

① بين أن النظمة (S) تكافئ النظمة :
 $(S') : \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (u + 2a)(u^3 - 8a(\bar{a})^2) = 0 \end{cases}$

0,75 ن

② نضع $a = re^{i\theta}$ حيث $r > 0$ و $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

0,75 ن

حدد بدلالة r و θ ألقاق نقط تقاطع (\mathcal{E}) و (\mathcal{H}) .

③ استنتج أن تقاطع (\mathcal{E}) و (\mathcal{H}) يتضمن ثلاث نقط و هي رؤوس لمثلث متساوي الأضلاع .

0,50 ن

التمرين الرابع : (10,5 ن)

① لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $f(x) = 4xe^{-x \ln 2} - 2$ و $g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$

و ليكن (\mathcal{E}) و (\mathcal{J}) المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على التوالي في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

① أ حسب نهايتي f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

0,75 ن

② حدد الفرعين اللانهائين للمنحنى (\mathcal{E}) .

0,50 ن

② بين أن : $f'(x) = 4(1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$; $(\forall x \in \mathbb{R})$.

0,75 ن

③ اعط جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن

بين أن العددين 1 و 2 هما الحلين الوحيديين للمعادلة $f(x) = 0$

③ أدرس الدالة g : الفروع اللانهائية - النهايات - التغيرات .

0,75 ن

④ ارسم (\mathcal{E}) و (\mathcal{J}) في نفس المعلم . $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4cm)$

0,50 ن

تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب نأخذ : $\frac{1}{\ln 2} \approx 1,4$ و $\frac{1}{e} \approx 0,4$ و $e \approx 2,7$ و $\ln 2 \approx 0,7$

(II) ليكن k عددا حقيقيا بحيث : $0 < k < \frac{2}{e}$

① ① تحقق مبيانيا أن المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين مختلفين لـ α و β بحيث : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$ ن 0,75

ⓑ حدد قيمة k بحيث يكون α و β هما حلا المعادلة $f(x) = 0$. ن 0,75

نعتبر الدالة العددية f_k المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f_k(x) = 4xe^{-kx} - 2$

② ① تأكد من أن : $f'_k(x) = 4(1 - kx)e^{-kx}$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ ن 0,50

ⓑ إعط جدول تغيرات f_k . ن 0,50

③ ① استنتج أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a و b . بحيث : $a < \frac{1}{k} < b$ ن 0,50

ⓑ بين أن $a = \alpha$ و $b = \beta$ ن 0,75

④ ① باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^t xe^{-kx} dx = \frac{1}{k^2}(1 - kte^{-kt} - e^{-kt})$; $(\forall t \in \mathbb{R})$ ن 0,75

ⓑ أحسب التكامل : $I_k = \int_\alpha^\beta f_k(x) dx$ بدلالة α و β . ن 0,75

③ استنتج أن : $\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$ ن 0,50

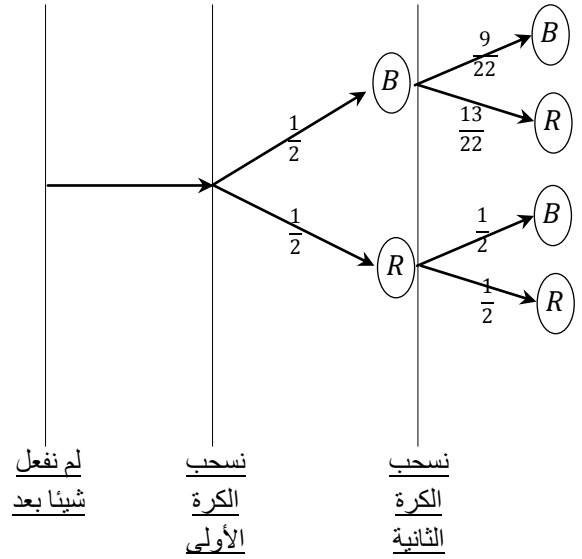
⑤ بين أنه إذا كان u و v عددا حقيقيان مختلفين موجبين قطعاً . بحيث : $\frac{\ln(u)}{u} = \frac{\ln(v)}{v}$ ن 0,75

فإن : $\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1$

التمرين الأول : (2,5 ن)

1 ■

النموذج الأمثل لحل هذا التمرين هو شجرة الاحتمالات .
من معطيات التجربة العشوائية نستنتج شجرة الاحتمالات التالية :



لدينا حسب الشجرة : $P(R \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2 ■

لدينا حسب الشجرة : $P(B \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{22} = \frac{9}{44}$

3 ■

لدينا حسب الشجرة :

$$P(\text{لونين مختلفين}) = P(B \cap R) + P(R \cap B) \\ = \frac{1}{2} \times \frac{13}{22} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{22} \\ = \frac{6}{11}$$

4 ■

نستعمل الاحتمال الشرطي التالي :

$$p_{B_2}(B_1) = \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{9}{22}}{\frac{1}{2} \times \frac{9}{22} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

التمرين الثاني : (3,0 ن)

1 ■

نلاحظ في البداية أن (1,1) حل خاص للمعادلة (E)

لأن : $3 \times 1 - 2 \times 1 = 1$ (*)

ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E) .

إذن : $3x - 2y = 1$ (**)

ننجز عملية الفرق بين المتساويتين (*) و (**) نحصل على :

$$3(x - 1) - 2(y - 1) = 0$$

ومنه : $3(x - 1) = 2(y - 1)$ إذن : $3/2(y - 1)$ ⊗

و بما أن : $3 \wedge 2 = 1$ فإنه حسب (Gauss) : $3 / (y - 1)$

إذن : $y = 3k + 1$; $(\exists k \in \mathbb{Z})$

نعوض y بقيمته في المتساوية ⊗ نحصل على : $3(x - 1) = 2(3k)$

يعني : $x = 2k + 1$

عكسيا : لدينا $3(2k + 1) - 2(3k + 1) = 1$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة تكتب على الشكل :

$$S = \{(2k + 1 ; 3k + 1) / k \in \mathbb{Z}\}$$

2 ■ (i)

لدينا :

$$3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 42n + 9 - 42n - 8 = 1$$

إذن (14n + 3 ; 21n + 4) حل للمعادلة (E) .

2 ■ (ب)

بما أن : $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$

فإنه حسب (Bezout) : $(14n + 3) \wedge (21n + 4) = 1$

3 ■ (i)

ليكن $(21n + 4) \wedge (2n + 1) = d$

باستعمال خوارزمية إقليدس نحصل على :

$$\begin{array}{r|l} (21n + 4) & (2n + 1) \\ (n - 6) & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} (2n + 1) & (n - 6) \\ 13 & 2 \end{array}$$

من هاتين الإقليديتين نستنتج أن :

$$(21n + 4) \wedge (2n + 1) = (2n + 1) \wedge (n - 6)$$

$$= (n - 6) \wedge 13$$

و لدينا : $(21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3) = 1$

يعني :

$$(n - 1)(21n + 4) \wedge (n - 1)(2n + 1)(14n + 3) = (n - 1)$$

و منه : $A \wedge B = (n - 1)$

خلاصة :

$$(\forall n \geq 2) ; A \wedge B = \begin{cases} 13(n - 1) ; & \text{si } n \equiv 6[13] \\ (n - 1) ; & \text{si } n \not\equiv 6[13] \end{cases}$$

التمرين الثالث : (4,0 ن)

■ (1) (أ)

نضع : $z = x + iy$

ننطلق من الكتابة : $z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2$

$$\Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z}) = (a - \bar{a})(a + \bar{a})$$

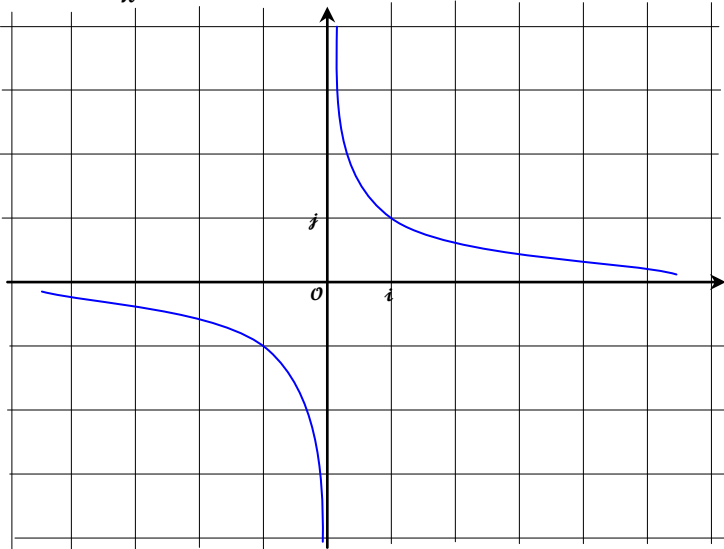
$$\Leftrightarrow (2iy)(2x) = (2i\beta)(2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow xy = \alpha\beta$$

و منه المجموعة (\mathcal{H}) هذلول معادلته : $y = \frac{\alpha\beta}{x}$

■ (1) (ب)

في حالة $a = (1 + i)$ لدينا (\mathcal{H}) هذلول معادلته : $y = \frac{1}{x}$



إذن : $d = (n - 6) \wedge 13$ (*)

و منه : $d / 13$

و نعلم أن 13 عدد أولي إذن : $d = 13$ أو $d = 1$

■ (3) (ب)

إذا كان $d = 13$ فإنه حسب (*) : $d / (n - 6)$

(لأن d قاسم مشترك لـ 13 و $(n - 6)$)

أي : $13 / (n - 6)$ و منه : $n \equiv 6[13]$

■ (4) (أ)

نضع : $A = P(n) = 21n^2 - 17n - 4$

و : $B = Q(n) = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

لدينا : $P(1) = Q(1) = 0$

إذن : 1 جذر للحدوديتين $P(n)$ و $Q(n)$ في \mathbb{Z} .

و منه : $P(n)$ و $Q(n)$ تقبلان القسمة على : $(n - 1)$

■ (4) (ب)

بالاستعانة بالقسمة الأقليدية نحصل على :

$$A = (n - 1)(21n + 4)$$

$$B = (n - 1)(28n^2 + 20n + 3)$$

بعد تعميل ثلاثية الحدود $(28n^2 + 20n + 3)$ نحصل على :

$$B = (n - 1)(2n + 1)(14n + 3)$$

تذكير بخاصية مهمة :

$$c \wedge a = 1 \Rightarrow (\forall b \in \mathbb{Z}) ; a \wedge b = a \wedge (bc)$$

ليكن : $(21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3) = d$

لدينا حسب السؤال (2) (ب) $(14n + 3) \wedge (21n + 4) = 1$

إذن حسب الخاصية المذكورة :

$$(21n + 4) \wedge (2n + 1) = (21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3)$$

و منه : $(21n + 4) \wedge (2n + 1) = d$

إذن حسب السؤال (3) (أ) $d = 1$ أو $d = 13$

الحالة الأولى : إذا كان $d = 13$.

إذن حسب السؤال (3) (ب) : $n \equiv 6[13]$

و لدينا : $(21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3) = 13$

يعني :

$$(n - 1)(21n + 4) \wedge (n - 1)(2n + 1)(14n + 3) = 13(n - 1)$$

و منه : $A \wedge B = 13(n - 1)$

الحالة الثانية : إذا كان $d = 1$ فإن : $n \not\equiv 6[13]$

$$\bar{u} = \frac{4a\bar{a}}{u} \quad \text{لدينا حسب المعادلة الثانية :}$$

نعوض \bar{u} بقيمته في المعادلة الأولى نحصل على :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u+2a) = \frac{4a\bar{a}}{u} \left(\frac{4a\bar{a}}{u} + 2\bar{a} \right) \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 2au - \left(\frac{4a\bar{a}}{u} \right)^2 - 2\bar{a} \left(\frac{4a\bar{a}}{u} \right) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^4 + 2au^3 - 16a^2\bar{a}^2 - 8a\bar{a}^2u = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u^4 - 8a\bar{a}^2u) + (2au^3 - 16a^2\bar{a}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u^3 - 8a\bar{a}^2) + 2a(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S') \begin{cases} (u+2a)(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

■ (3) ب

لنحل النظمة (S') بحيث : $a = re^{i\theta}$

لدينا حسب المعادلة الثانية من النظمة (S') :

$$(u+2a)(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (u+2a) = 0 \quad \text{أو} \quad (u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = -2re^{i\theta} \quad \text{أو} \quad u^3 = 8r^3e^{-i\theta}$$

حلول المعادلة : $u^3 = 8r^3e^{-i\theta}$ هي الجذور النونية من الدرجة الثالثة للعدد اللعدي $8r^3e^{-i\theta}$ والتي تكتب بصفة عامة على شكل :

$$k \in \{0,1,2\} \text{ مع } u_k = \left[\sqrt[3]{8r^3}, \frac{-\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right]$$

$$u_0 = \left[2r ; \frac{-\theta}{3} \right] = 2re^{-\frac{\theta}{3}} \quad \text{ولدينا :}$$

$$u_1 = \left[2r ; \frac{-\theta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right] = 2re^{\frac{-\theta+2\pi}{3}}$$

$$u_2 = \left[2r ; \frac{-\theta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right] = 2re^{\frac{-\theta+4\pi}{3}}$$

$$2re^{-\frac{\theta}{3}}$$

$$-2re^{-i\theta}$$

إذن حلول النظمة هي :

$$2re^{\frac{-\theta+4\pi}{3}}$$

$$2re^{\frac{-\theta+2\pi}{3}}$$

■ (2) ا

ليكن : $z = x + iy$

ننتقل من الكتابة : $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a}$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - (z\bar{a} + a\bar{z}) + a\bar{a} = 4a\bar{a}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2) - (2ax + 2\beta y) + \alpha^2 + \beta^2 = (2|a|)^2$$

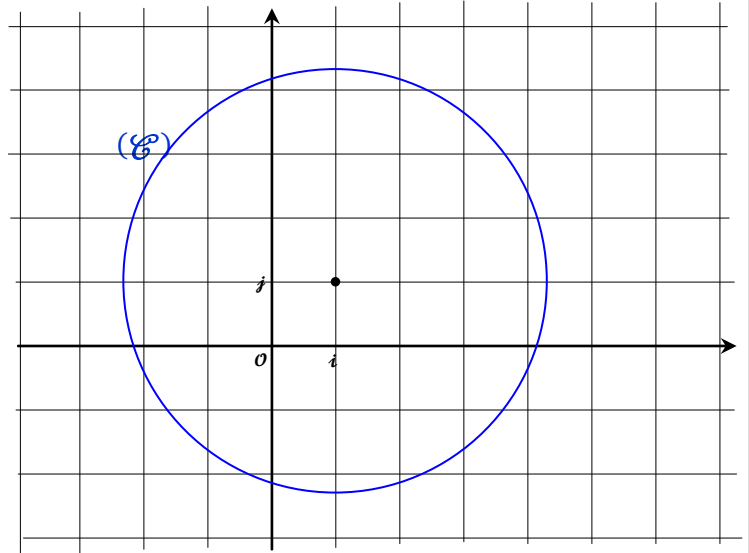
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2ax + \alpha^2) + (y^2 - 2\beta y + \beta^2) = (2|a|)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (2|a|)^2$$

إذن : (C) دائرة مركزها النقطة $C(\alpha, \beta)$ و شعاعها $r = 2|a|$

■ (2) ا

في حالة $a = (1+i)$ لدينا (C) دائرة مركزها $C(1,1)$ و شعاعها $2\sqrt{2}$



■ (3) ا

لدينا : $u = z - a$ إذن : $\bar{u} = \bar{z} - \bar{a}$

$$\begin{cases} z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2 \\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases} \quad \text{ننتقل من الكتابة :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2 \\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (z-a)(z+a) = (\bar{z}-\bar{a})(\bar{z}+\bar{a}) \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u+2a) = \bar{u}(\bar{u}+2\bar{a}) \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

1) ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4e^{-x \ln 2} - \frac{2}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{بما أن :}$$

فإن : (ع) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \quad \text{و بما أن :}$$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = -2$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

2) ا ب

$$f'(x) = 4(1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$$

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 4e^{-x \ln 2} > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1 - x \ln 2)$

$$f'(x) = 0 \quad \text{فإن} \quad x = \frac{1}{\ln 2} \quad \text{إذا كان :}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{فإن} \quad x > \frac{1}{\ln 2} \quad \text{إذا كان :}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{فإن} \quad x < \frac{1}{\ln 2} \quad \text{إذا كان :}$$

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{4}{e \ln 2} - 2 \quad \text{و لدينا :}$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		+	-
f		$\frac{4}{e \ln 2} - 2$	
	$-\infty$		-2

2) ج

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f :

$$f \text{ دالة متصلة و تزايدية قطعاً على } \left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[$$

$$\text{إذن } f \text{ تقابل من المجال } \left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[\text{ نحو المجال } \left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[$$

$$\text{و لدينا : } f\left(\left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[\right) = \left] -\infty, \frac{4}{e \ln 2} - 2 \right[\approx \left] -\infty, \frac{1}{10} \right[$$

$$\text{و بما أن : } 0 \in \left] -\infty, \frac{1}{10} \right[$$

$$\text{إذن } 0 \text{ يمتلك سابقاً واحداً وحيداً بالتقابل } f \text{ في المجال } \left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[$$

$$\text{و لدينا : } f(1) = 4e^{-\ln 2} - 2 = 0$$

$$\text{و } 1 \in \left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right[$$

و نعلم أن : $z = u + ai$

إذن القيم التي يأخذها z هي :

$$2re^{-\frac{\theta}{3}} + re^{i\theta}$$

$$-re^{-i\theta}$$

$$2re^{-\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}} + re^{i\theta}$$

$$2re^{-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}} + re^{i\theta}$$

3) ج

نضع : $z_0(A)$ و $z_1(B)$ و $z_2(C)$

نريد أن نبرهن على أن المثلث ABC متساوي الأضلاع .

لدينا :

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{2r - 2rj}{2rj - 2rj} = \frac{1 - j}{j - j} = \frac{1 - j}{-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$\text{إذن : } \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \quad \text{و} \quad \left|\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right| \equiv 1$$

و منه :

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \quad \text{و} \quad |z_C - z_A| = |z_B - z_A|$$

و بالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع (غير مباشر)

التمرين الرابع : (10 ن)

الجزء الأول

1) ا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4xe^{-x \ln 2} - 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(\frac{4}{\ln 2}\right) \frac{1}{\left(\frac{e^{x \ln 2}}{x \ln 2}\right)} - 2 \right)$$

$$= \left(\frac{4}{\ln 2}\right) \left(\frac{1}{0^-}\right) - 2 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{4}{\ln 2}\right) \frac{1}{\left(\frac{e^{x \ln 2}}{x \ln 2}\right)} - 2 \right)$$

$$= \left(\frac{4}{\ln 2}\right) \left(\frac{1}{+\infty}\right) - 2 = \boxed{-2}$$

3) ب

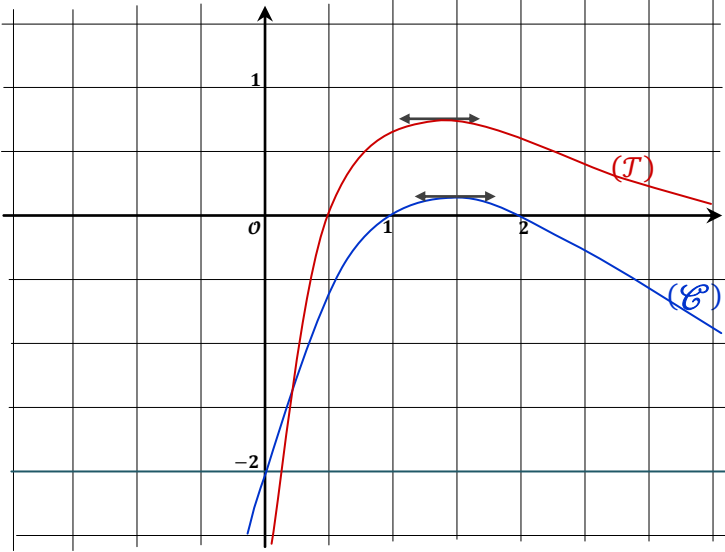
قبل رسم (T) أضيف نقطة تقاطع (T) مع محور الأفاسيل
و التي يحقق أفصولها المعادلة $g(x) = 0$

نحل المعادلة : $g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2x)}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x) = \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



الجزء الثاني

1) أ

لدينا : $g'\left(\frac{e}{2}\right) = 0$

إذن (T) يقبل مماسا أفقيا في النقطة $\Omega\left(\frac{e}{2}; \frac{2}{e}\right)$

و منه المستقيم $(\Delta): y = \frac{2}{e}$ يقطع (T) في نقطة واحدة و هي Ω

و لدينا حسب الرسم المبياني : (T) مقعر

إذن كل مستقيم $y = k$ متواجد بين (D) و محور الأفاسيل
يقطع (T) في نقطتين

و بالتالي : المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين α و β مختلفين بشرط

$$0 < k < \frac{2}{e} \quad \text{أن يكون}$$

بما أن : $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ و α و β مختلفين فإن أحدهما أصغر

$$\frac{1}{2} < \alpha < \beta \quad \text{من الآخر ونضع}$$

و لدينا كذلك حسب جدول تغيرات الدالة f

f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $\left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$
إذن f تقابل من $\left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$ نحو صورته $\left]-2, \frac{1}{10}\right]$

$$\text{مع : } \frac{4}{e \ln 2} - 2 \approx \frac{1}{10}$$

$$\text{و بما أن : } 0 \in \left]-2, \frac{1}{10}\right]$$

فإن الصفر يمتلك سابقا وحيدا بالتقابل f في المجال $\left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$

و لدينا : $2 \in \left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$ ولدينا : $f(2) = 0$

خلاصة : العددين 1 و 2 هما الحلان الوحيدان للمعادلة $f(x) = 0$

3) أ

دراسة الدالة g
 $g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$

لدينا g دالة معرفة على المجال $]0, +\infty[$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(2x)}{x}\right) = -\infty$

إذن محور الأرتيب مقارب عمودي لـ (T)

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(2x)}{x}\right) = 0$

إذن محور الأفاسيل مقارب أفقي لـ (T) بجوار $+\infty$

$$g'(x) = \frac{1 - \ln(2x)}{x^2}$$

إذا كان : $x = \frac{e}{2}$ فإن : $g'(x) = 0$

إذا كان : $x > \frac{e}{2}$ فإن : $g'(x) < 0$

إذا كان : $x < \frac{e}{2}$ فإن : $g'(x) > 0$

$$\text{و لدينا : } g\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{2}{e}$$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	0	$\frac{e}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	-
g	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

و بنفس الطريقة لدينا f_k تقابل من $+\infty$; $\frac{1}{k}$ نحو $]-2; \frac{4}{ke} - 2[$ لأنها متصلة و تناقصية قطعا على المجال $].\frac{1}{k}; +\infty[$.

بما أن $]-2; \frac{4}{ke} - 2[\in 0$ فإن الصفر يمتلك سابقا وحيدا b

من المجال $].\frac{1}{k}; +\infty[$ بالتقابل f_k

يعني : $f_k(b) = 0$ و $b > \frac{1}{k}$

و بالتالي : المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين

$a < \frac{1}{k} < b$ بحيث a و b

■ (3) ب

نلاحظ أن $f_{\ln 2}(x) = f(x)$

و نعلم أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين وحيدين و هما 1 و 2

إذن المعادلة $f_{\ln 2}(x) = 0$ تقبل كذلك حلين وحيدين فقط و هما 1 و 2

و لدينا المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين a و b

كيفما كان $0 < k < \frac{2}{e}$

إذن لدينا بالضرورة $a = 1$ و $b = 2$ لأن a و b وحيدين.

■ (4) ج

$$\int_0^t x e^{-kx} dx = \left[\frac{x e^{-kx}}{-k} \right]_0^t - \int_0^t \left(\frac{e^{-kx}}{-k} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t x e^{-kx} dx = \left[\frac{x e^{-kx}}{-k} \right]_0^t + \frac{1}{k} \left[\frac{e^{-kx}}{-k} \right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t x e^{-kx} dx = \left(\frac{t e^{-kt}}{-k} \right) + \frac{1}{k} \left(\frac{e^{-kt}}{-k} \right) + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} \right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2} (1 - k t e^{-kt} - e^{-kt})$$

■ (4) ب

$$I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (4x e^{-kx} - 2) dx \quad \text{لدينا :}$$

$$= 4 \left(\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx \right) - 2(\beta - \alpha)$$

■ (1) ب

ليكن α و β حلا للمعادلة $f(x) = 0$

بما أن : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

فإنه حسب السؤال (2) ج من الجزء الأول : $\alpha = 1$ و $\beta = 2$

من جهة أخرى لدينا حسب السؤال (1) ج من الجزء الثاني :

α و β هما حلا للمعادلة $g(x) = k$

ومنه : $g(1) = k$ و $g(2) = k$

أي : $\ln 2 = k$ و $\ln 4 = 2k$

و بالتالي : $k = \ln 2$

■ (2) ج

ليكن x عنصرا من \mathbb{R}

$$f'_k(x) = 4(e^{-kx} - kx e^{-kx}) = 4(1 - kx)e^{-kx}$$

■ (2) ب

x	$-\infty$	$\frac{1}{k}$	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	-
f_k	$-\infty$	$\frac{4}{ke} - 2$	-2

■ (3) ج

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_k :

f_k تقابل من $]-\infty; \frac{1}{k}[$ نحو $]-\infty; \frac{4}{ke} - 2[$ لأنها متصلة و تزايدية قطعا

و لدينا : $0 \in]-\infty; \frac{4}{ke} - 2[$

لأن :

لدينا : $0 < k < \frac{2}{e}$

إذن : $\frac{1}{k} > \frac{e}{2}$

ومنه : $\frac{4}{ke} > 2$

أي : $\frac{4}{ke} - 2 > 0$

إذن 0 يمتلك سابقا وحيدا a في المجال $]-\infty; \frac{1}{k}[$ بالتقابل f_k

و بالتالي بالرجوع إلى (*) نحصل على :

$$\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$$

■ (5)

ليكن u و v عدنان حقيقيان مختلفان و موجبان قطعاً بحيث :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(u)}{u} &= \frac{\ln(v)}{v} \\ \Leftrightarrow \frac{\ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{2\left(\frac{u}{2}\right)} &= \frac{\ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{2\left(\frac{v}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow \frac{\ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} &= \frac{\ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\frac{\ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{\ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)} = k \quad \text{نضع :}$$

إذن العدنان $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة : $\frac{\ln(2x)}{x} = k$

أو بتعبير آخر $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة : $g(x) = k$

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة g :

$\frac{2}{e}$ قيمة قصوية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$

إذن : $0 \leq \frac{\ln(2x)}{x} \leq \frac{2}{e} \quad \forall x \in]0; +\infty[$;

ومنه : $0 \leq k \leq \frac{2}{e}$

لدينا إذن $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلاً للمعادلة : $g(x) = k$ بحيث $0 \leq k \leq \frac{2}{e}$

و بالتالي يمكننا تطبيق نتائج التمرين و خصوصاً نتيجة السؤال (4) (ج)

$$\ln\left(2\frac{u}{2}\right) \cdot \ln\left(2\frac{v}{2}\right) \leq 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1 \quad \text{و بالتالي :}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx &= \int_0^{\beta} x e^{-kx} dx - \int_0^{\alpha} x e^{-kx} dx \quad \text{لدينا :} \\ &= \frac{1}{k^2} (1 - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta} - 1 + k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k^2} (k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha} - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta})$$

و نعلم أن : $f_k(\alpha) = 0$ و $f_k(\beta) = 0$

$$4\beta e^{-k\beta} - 2 = 0 \quad \text{و} \quad 4\alpha e^{-k\alpha} - 2 = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 2\beta &= e^{\beta k} \quad \text{و} \quad (1) \quad 2\alpha = e^{\alpha k} \end{aligned} \quad \text{ومنّه :}$$

بالرجوع إلى التعبير الأخير للتكامل $\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx$

$$\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2} \left(\frac{k\alpha}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} - \frac{k\beta}{2\beta} - \frac{1}{2\beta} \right) \quad \text{نحصل على :}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\beta} \right)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx = \frac{(\beta - \alpha)}{2\alpha\beta k^2}$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعبير التكامل I_k نحصل على :

$$I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx = 4 \left(\int_{\alpha}^{\beta} (x e^{-kx}) dx \right) - 2(\beta - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow I_k = \frac{4(\beta - \alpha)}{2\alpha\beta k^2} - 2(\beta - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow I_k = 2(\beta - \alpha) \left(\frac{1}{\alpha\beta k^2} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow I_k = \frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha\beta k^2} (1 - \alpha\beta k^2)$$

■ (4) (ج)

بما أن $\alpha < \beta$ عدنان حقيقيان موجبان قطعاً و $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

فإن التكامل I_k يقيس مساحة و منه I_k كمية موجبة.

$$\text{إذن : } (1 - \alpha\beta k^2) \geq 0$$

$$\text{يعني : } (\alpha k)(\beta k) \leq 1 \quad (*)$$

باستعمال العلاقتين (1) و (2) نستنتج منهما :

$$(\beta k) = \ln(2\beta)$$

و

$$(\alpha k) = \ln(2\alpha)$$