



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

**التمرين الأول : ( 2,5 ن )**

$x \wedge y$  هو القاسم المشترك الأكبر للعددين  $x$  و  $y$ .

$\overline{abc}^{(x)}$  هي كتابة العدد  $abc$  في نظمة العد ذات الأساس  $x$ .

① نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة :  $(E) : (x + 1)^2 = 9 + 5y$ .

أ) ليكن  $(x, y)$  حلا للمعادلة  $(E)$ . ن 0,50

بين أن  $x \equiv 1[5]$  أو  $x \equiv 2[5]$ .

ب) حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $(E)$ . ن 0,50

② بين أن :  $(\forall k \in \mathbb{Z}) ; (5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (K - 3) \wedge 8$  ن 0,75

③ حل في  $\mathbb{N}^2$  النظمة التالية :  $\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$  ن 0,75

**التمرين الثاني : ( 4,5 ن )**

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر المنحنى  $(\mathcal{E}_m)$  الذي معادلته هي :

$$\frac{x^2}{(10 - m)} + \frac{y^2}{(2 - m)} = 1 ; m \in \mathbb{R} \setminus \{2; 10\}$$

① (I) ناقش حسب قيم  $m$  طبيعة المنحنى  $(\mathcal{E}_m)$ . ن 1,00

② إذا كان  $(\mathcal{E}_m)$  مخروطيا ، اعط عناصره المميزة ( المركز و الرؤوس و البؤرتان و المقاربان إن وجدا ) ن 1,00

③ أرسم  $(\mathcal{E}_1)$ . ن 0,25

(II) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :

$$(E) : z^2 - (6 \cos \alpha)z + 1 + 8 \cos^2 \alpha = 0 \quad \text{حيث} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

① حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E)$ . ن 0,50

ليكن  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة  $(E)$  ;  $(\Re m(z_1) > 0)$  و  $M_1$  و  $M_2$  النقطتان ذات اللحين  $z_1$  و  $z_2$  على التوالي.

② أ) تحقق أن :  $M_1 \in (\mathcal{E}_1)$ . ن 0,25

ب) بين أنه توجد نقطتان  $P_1$  و  $P_2$  من  $(\mathcal{E}_1)$  حيث يكون فيهما المماس للمنحنى  $(\mathcal{E}_1)$  موازيا للمستقيم  $(OM_1)$ . ن 0,75

ج) تحقق أن :  $OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2$ . ن 0,75

**التمرين الثالث : ( 2,5 ن )**

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 20 .

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و  $(n - 10)$  كرة سوداء ، نفترض أن كل الكرات غير قابلة للتمييز باللمس

نسحب كرة من الكيس و نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس . نكرر هذه التجربة  $n$  مرة . نسمي احتمال الحصول على كرة بيضاء  $k$   $(0 \leq k \leq n)$  .

① أحسب  $p_k$  بدلالة  $n$  و  $k$  . ن 0,50

② نضع :  $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$  حيث :  $k \in \{0, 1, \dots, (n - 1)\}$  .

① بين أن :  $u_k = \frac{(n - k)}{(k + 1)} \times \frac{10}{(n - 10)}$  ن 0,50

② بين أن :  $0 \leq k \leq 9 \Leftrightarrow u_k \geq 1$  و  $10 \leq k \leq n - 1 \Leftrightarrow u_k \leq 1$  ن 0,50

③ استنتج أكبر قيمة  $M$  للعدد  $p_k$  عندما يتغير  $k$  في  $\{0, 1, \dots, n\}$  . ن 1,00

و بين أن :  $M = \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n - 10)^{n-10}}{(n - 10)!}$

**التمرين الرابع : ( 10,5 ن )**

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f(x) = (1 + x)e^{-2x}$

ليكن  $(\mathcal{E})$  منحناها في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

① (I) أحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ن 0,50

② أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى  $(\mathcal{E})$  . ن 0,50

② أدرس تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  . ن 0,50

③ (I) أدرس تقعر المنحنى  $(\mathcal{E})$  . ن 0,50

③ (II) أنشئ  $(\mathcal{E})$  . ن 0,50

④ (I) بين أن  $f$  حل للمعادلة التفاضلية  $y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$  :  $(E)$  . ن 0,50

④ (II) حدد الحل العام للمعادلة  $(E)$  . ن 0,50

(II) ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$  نرمز بـ  $A_n$  لمساحة الحيز المحصور بين  $(\mathcal{C})$  و محور الأفصيل و محور الأرتيب و المستقيم ذي المعادلة  $x = n$ .

① أحسب  $A_n$  بدلالة  $n$ . 1,00 ن

② أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$  0,50 ن

(III) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم نضع :  $u_n = \int_0^n [f(x)]^n dx$

① باستعمال تقنية تغيير المتغير  $(xn = t)$  بين أن :  $u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) 0,75 ن

② بين أن :  $(\forall r \in [1; 2]) ; 2 - r \leq \frac{1}{r} \leq 1$  0,50 ن

ⓑ استنتج :  $x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ), ( $\forall x \in [0; n]$ ) 0,75 ن

③ بين أن :  $u_n \leq \int_0^n e^{-x} dx$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) 0,50 ن

ⓑ بين أن :  $e^{\frac{-1}{2\sqrt{n}}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x} dx \leq u_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) 0,75 ن

Ⓒ استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  متقاربة و حدد نهايتها. 0,75 ن

④ ليكن  $a$  عنصرا من المجال  $]0,1[$ .

ⓐ بين أن :  $\int_a^1 n [f(x)]^n dx \leq n(1 - a)[f(a)]^n$  0,50 ن

ⓑ استنتج أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^1 n [f(x)]^n dx = 0$  0,50 ن

Ⓒ أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n n [f(x)]^n dx$  0,50 ن

1 (i) ■

ليكن  $(x, y)$  حلا للمعادلة (E).

هذا يعني أن :  $(x + 1)^2 = 9 + 5y$

ومنه :  $5/(x + 4)(x - 2) - 9 = 5/(x + 1)^2$  أي :  $5/(x + 4)(x - 2)$   
و بما أن 5 عدد أولي :

فإن :  $5/(x - 2)$  أو  $5/(x + 4)$

ومنه :  $5/(x - 2) - 5$  أو  $5/(x + 4) - 5$

يعني :  $x \equiv 2[5]$  أو  $x \equiv 1[5]$

1 (b) ■

إذا كان :  $x \equiv 1[5]$  فإن :  $5/(x - 1)$

ومنه :  $x - 1 = 5k$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

يعني :  $x = 5k + 1$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

ومنه حسب المعادلة (E) :  $(5k + 1 + 1)^2 = 9 + 5y$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

يعني :  $25k^2 + 4 + 20k = 9 + 5y$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

ومنه :  $y = 5k^2 + 4k - 1$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

إذا كان  $x \equiv 2[5]$  فإن  $5/(x - 2)$

يعني :  $x - 2 = 5k$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

أي :  $x = 5k + 2$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

ومنه حسب المعادلة (E) :  $(5k + 3)^2 = 9 + 5y$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

يعني :  $25k^2 + 9 + 30k = 9 + 5y$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

إذن :  $y = 5k^2 + 6k$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

وبالتالي :  $S$  مجموعة حلول المعادلة (E) نكتب على الشكل :

$$S = \{ (5k + 1 ; 5k^2 + 4k - 1) ; (5k + 2 ; 5k^2 + 6k) / k \in \mathbb{Z} \}$$

2 ■

أذكر في البداية بمبدأ خوارزمية أقليدس :

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \Rightarrow a \wedge b = b \wedge c$$

$$\begin{array}{c|c} 5k^2 + 4k - 1 & 5k + 1 \\ \hline 3k - 1 & k \end{array} \text{ لدينا :}$$

إذن :

$$(5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (5k + 1) \wedge (3k - 1) \quad (1)$$

$$\begin{array}{c|c} 5k + 1 & 3k - 1 \\ \hline 2k + 2 & 1 \end{array} \text{ و لدينا كذلك :}$$

$$(2) \quad (5k + 1) \wedge (3k - 1) = (3k - 1) \wedge (2k + 2)$$

$$\begin{array}{c|c} 3k - 1 & 2k + 2 \\ \hline k - 3 & 1 \end{array} \text{ و لدينا كذلك :}$$

$$(3) \quad (3k - 1) \wedge (2k + 2) = (2k + 2) \wedge (k - 3)$$

$$\begin{array}{c|c} 2k + 2 & k - 3 \\ \hline 8 & 2 \end{array} \text{ و لدينا كذلك :}$$

$$(4) \quad (2k + 2) \wedge (k - 3) = (k - 3) \wedge 8$$

من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$$(5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (k - 3) \wedge 8$$

3 ■

لنحل النظام التالي :

$$\begin{cases} 121(x) = 59(y) \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 = 9 + 5y \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$$

نستنتج من هذه الكتابة الأخيرة أن  $(x, y)$  حل للمعادلة (E) و  $x \equiv 1[5]$

إذن حسب نتيجة السؤال (b) :

$$x = 5k + 1 \quad \text{و} \quad y = 5k^2 + 4k - 1$$

بما أن :  $x \wedge y = 8$  فإن :  $(5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = 8$

ومنه حسب السؤال (2) :  $(k - 3) \wedge 8 = 8$

إذن : 8 تقسم العدد  $(k - 3)$ .

$$\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) ; k - 3 = 8n$$

$$\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) ; k = 8n + 3$$

$$\begin{cases} x = (5k + 1) = 40n + 16 \\ y = 5k^2 + 4k - 1 = 320n^2 + 272n + 56 \end{cases} \text{ و بالتالي :}$$

و بالتالي مجموعة حلول النظام هي :

$$S' = \{ (40n + 16 ; 320n^2 + 272n + 56) / n \in \mathbb{Z} \}$$

### التمرين الثاني : (4,5 ن)

1 (I) ■

إذا كان :  $2 - m > 0$  و  $10 - m > 0$

يعني :  $m < 2$  و  $m < 10$

$$(\mathcal{E}_m) : \frac{x^2}{(\sqrt{10 - m})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2 - m})^2} = 1 \quad \text{فإن :}$$

ومنه :  $(\mathcal{E}_m)$  إهليلج.

إذا كان :  $2 < m < 10$

فإن :  $10 - m > 0$  و  $m - 2 > 0$

$$(\mathcal{E}_m) : \frac{x^2}{(\sqrt{10 - m})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{m - 2})^2} = 1 \quad \text{ومنه :}$$

إذن :  $(\mathcal{E}_m)$  هذلول.

① (II) ■

نعتبر في  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية :

$$(E) ; z^2 - (6\cos\alpha)z + (1 + 8\cos^2\alpha) = 0$$

$$\Delta = (6\cos\alpha)^2 - 4(1 + 8\cos^2\alpha) = (2i \sin\alpha)^2 \quad \text{لدينا}$$

و منه (E) تقبل حلين عقديين مترافقين  $z_1$  و  $z_2$  معرفين كما يلي :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{6\cos\alpha + 2i \sin\alpha}{2} = 3\cos\alpha + i \sin\alpha \\ z_2 = \frac{6\cos\alpha - 2i \sin\alpha}{2} = 3\cos\alpha - i \sin\alpha \end{cases}$$

① ② (II) ■

نضع :  $M_2(z_2)$  و  $M_1(z_1)$

$$\frac{9\cos^2\alpha}{9} + \frac{\sin^2\alpha}{1} = 1 \quad \text{و منه} \quad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\frac{(3\cos\alpha)^2}{3^2} + \frac{\sin^2\alpha}{1} = 1 \quad \text{أي}$$

إذن الزوج  $(3\cos\alpha ; \sin\alpha)$  يحقق معادلة الإهليلج  $(\mathcal{E}_1)$

و منه :  $M_1 \in (\mathcal{E}_1)$

⊖ ② (II) ■

لتكن  $P(x_0; y_0)$  نقطة من الإهليلج  $(\mathcal{E}_1)$

المعادلة الديكارتية لـ (T) مماس الإهليلج  $(\mathcal{E}_1)$  في  $P$  هي :

$$(T) : \frac{xx_0}{9} + \frac{yy_0}{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow (T) : y = \left(\frac{-x_0}{9y_0}\right)x + 1$$

لدينا :  $M_1$  هي صورة  $z_1$  إذن :  $M_1(3\cos\alpha ; \sin\alpha)$

و منه المعادلة الديكارتية المختصرة لـ  $(OM_1)$  نكتب على شكل :

$$(OM_1) : y = \left(\frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha}\right)x$$

ننطق من الكتابة :  $(OM_1) \parallel (T)$

$$\left(\frac{-x_0}{9y_0}\right) = \left(\frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha}\right) \quad \text{هذا يعني أن لهما نفس الميل أي}$$

$$(*) \quad x_0 = -3y_0 \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) \quad \text{و منه}$$

و بما أن :  $P(x_0; y_0) \in (\mathcal{E}_1)$

$$\frac{x_0^2}{3^2} + \frac{y_0^2}{1^2} = 1 \quad \text{فإن}$$

إذا كان :  $m > 10$  فإن :  $m - 2 > 0$  و  $10 - m < 0$

$$\text{و منه} : (\mathcal{E}_m) : -\left(\frac{x^2}{(\sqrt{m-10})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right) = 1$$

نلاحظ أن الكمية  $(\mathcal{E}_m) = \emptyset$  موجبة إذن :

② (I) ■ في الحالة  $m < 2$  يعني :  $m < 10$

$$(\mathcal{E}_m) : \left(\frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2-m})^2}\right) = 1 \quad \text{لدينا}$$

و منه :  $(\mathcal{E}_m)$  إهليلج مركزه  $O(0,0)$

و رؤوسه :  $A(\sqrt{10-m}, 0)$  و  $B(-\sqrt{10-m}, 0)$

و  $A'(0, \sqrt{2-m})$  و  $A(0, -\sqrt{2-m})$

نضع :  $a = \sqrt{10-m}$  و  $b = \sqrt{2-m}$

لدينا :  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(2-m) - (10-m)} = 2\sqrt{2}$

و منه : بؤرتا الإهليلج  $(\mathcal{E}_m)$  هما :  $F(2\sqrt{2}, 0)$  و  $F'(-2\sqrt{2}, 0)$

في الحالة :  $2 < m < 10$

$$(\mathcal{E}_m) : \left(\frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right) = 1 \quad \text{لدينا}$$

و منه :  $(\mathcal{E}_m)$  هذلول مركزه  $O(0,0)$

و رأساه هما :  $A(\sqrt{10-m}, 0)$  و  $A'(-\sqrt{10-m}, 0)$

نضع :  $a = \sqrt{10-m}$  و  $b = \sqrt{m-2}$

لدينا :  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(m-2) + (10-m)} = 2\sqrt{2}$

و منه : بؤرتا الهذلول  $(\mathcal{E}_m)$  هما :  $F(\sqrt{8}, 0)$  و  $F'(-\sqrt{8}, 0)$

و لدينا كذلك :  $(\mathcal{E}_m)$  يقبل مقاربتين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  معرفين بما يلي :

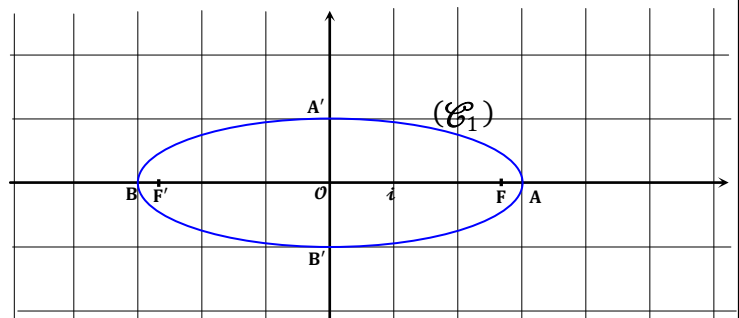
$$\begin{cases} (\Delta) : y = \frac{b}{a}x \\ (\Delta') : y = -\frac{b}{a}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\Delta) : y = \left(\sqrt{\frac{m-2}{10-m}}\right)x \\ (\Delta') : y = -\left(\sqrt{\frac{m-2}{10-m}}\right)x \end{cases}$$

③ (I) ■

لدينا حسب ما سبق  $(\mathcal{E}_1)$  إهليلج مركزه  $O(0,0)$

و رؤوسه :  $A(3,0)$  و  $B(-3,0)$  و  $A'(0,1)$  و  $B'(0,-1)$

و بؤرتاه هما :  $F(\sqrt{8}, 0)$  و  $F'(-\sqrt{8}, 0)$



**التمرين الثالث : (2,5 ن)**

1 ■

**تذكير :** ليكن  $p$  احتمال وقوع حدث  $A$  في تجربة عشوائية  $E$ .

عند إعادة التجربة  $E$  مرة متتالية فإن احتمال الحصول على

الحدث  $A$  بالضبط  $k$  مرة هو :  $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

في هذا التمرين : الحدث  $A$  هو الحصول على كرة بيضاء.

ولدينا :  $p(A) = \frac{10}{n}$

نكرر التجربة  $n$  مرة.

إذن احتمال الحصول على الحدث  $A$   $k$  مرة هو احتمال الحصول على  $k$  كرة

بيضاء و يساوي :  $p_k = C_n^k (p(A))^k (1-p(A))^{n-k}$

إذن :  $p_k = C_n^k \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}$

يمكن ترك هذه النتيجة على ما هي عليه و نكون بذلك قد أجبنا على

السؤال باقتصاد تام . و يمكن إضافة بعض المراحل إن كنت من هواة

الحساب الحرفي لكي تصل إلى النتيجة التالية :

$$p_k = C_n^k \left(\frac{10}{n-10}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^n$$

2 (i) ■

نضع :  $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$

$$u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{C_n^{k+1} \left(\frac{10}{n-10}\right)^{k+1} \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k-1}}{C_n^k \left(\frac{10}{n-10}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}} \quad \text{لدينا}$$

و لدينا :

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{(n-k)}{(k+1)}$$

$$u_k = \frac{(n-k)}{(k+1)} \times \left(\frac{10}{n-10}\right) \quad \text{و منه}$$

2 (b) ■

نفترض أن :  $u_k \geq 1$

لدينا حسب المعطيات  $k \geq 0$

يكفي إذن أن نبرهن على أن :  $k \leq 9$

لدينا :  $u_k \geq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-k)}{(k+1)} \times \left(\frac{10}{n-10}\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \geq 1$$

بما أن :  $n \geq k$  فإن :  $n-k \geq 0$

و منه العدان :  $10(n-k)$  و  $(n-10)(k+1)$  موجبان.

نعوض  $x_0$  بقيمته حسب (\*) في آخر تعبير حصلنا عليه نجد :

$$\frac{1}{9} \left(-3y_0 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 + y_0^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 = \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow y_0 = \pm \cos \alpha$$

إذا كان  $y_0 = \cos \alpha$  فإن :  $x_0 = -3y_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) = -3 \sin \alpha$

إذا كان  $y_0 = -\cos \alpha$  فإن :  $x_0 = -3y_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) = 3 \sin \alpha$

$$\begin{cases} P_1(3 \sin \alpha ; -\cos \alpha) \\ P_2(-3 \sin \alpha ; \cos \alpha) \end{cases}$$

و بالتالي : توجد نقطتان

من الإهليلج  $(\mathcal{E}_1)$  : حيث المماس لـ  $(\mathcal{E}_1)$  في كل منهما يوازي  $(OM_1)$

2 (II) (c) ■

لدينا :  $M_1(z_1)$  و  $M_2(z_2)$  و  $P_1(3 \sin \alpha - i \cos \alpha)$

و  $P_2(-3 \sin \alpha + i \cos \alpha)$

و منه :  $OM_1^2 + OP_1^2 = |z_1|^2 + |3 \sin \alpha - i \cos \alpha|^2$

$$= (9 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (9 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= 9(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= 10$$

و بنفس الطريقة لدينا :

$OM_2^2 + OP_2^2 = |z_2|^2 + |-3 \sin \alpha + i \cos \alpha|^2$

$$= (9 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (9 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= 9(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= 10$$

و بالتالي :  $OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

① ① (I) ■

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x)e^{-2x}$$

$$= \lim_{\substack{m \rightarrow -\infty \\ m=2(x+1)}} \left( \frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)e^{-2x}$$

$$= \lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ m=2(x+1)}} \left( \frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)} \right) = 0$$

② ① (I) ■

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  حسب السؤال (j)

إذن : (ع) يقبل مقاربا أفقيا بجوار  $+\infty$  و هو محور الأفاصيل

و لدينا كذلك حسب السؤال (i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) e^{-2x} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) e^{-2x} = +\infty \quad \text{و :}$$

إذن : (ع) يقبل فرعا شلجيميا بجوار  $-\infty$  اتجاهه محور الأراتيب

② (I) ■

لدينا :  $f(x) = (1+x)e^{-2x}$

إذن  $f$  دالة قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  لأنها جداء الدالتين قابلتين للإشتقاق على  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = e^{-2x} - 2(1+x)e^{-2x} \quad \text{و منه :}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -(1+2x)e^{-2x}$$

بما أن :  $e^{-2x} > 0$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R})$

فإن إشارة  $f'(x)$  متعلقة فقط بإشارة  $(1+2x)$  .

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{e}{2} \quad \text{لدينا :}$$

و لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

نستنتج إذن جدول تغيرات  $f$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		+	-
$f$		$\frac{e}{2}$	
	$-\infty$		0

$$\Leftrightarrow 10(n-k) \geq (n-10)(k+1)$$

$$\Leftrightarrow 10n - 10k \geq nk + n - 10k - 10$$

$$\Leftrightarrow 10n - n + 10 \geq k(n-10+10)$$

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{9n+10}{n}$$

$$\Leftrightarrow k \leq 9 + \frac{10}{n}$$

$$\Leftrightarrow k \leq 9$$

و بالتالي :  $0 \leq k \leq 9$

الشرط الثاني من السؤال :

ننتقل من :  $10 \leq k \leq (n-1)$

$$(1) \quad 10 \leq 10(n-k) \leq 10(n-10) \quad \text{يعني :}$$

و لدينا كذلك :  $10 \leq k \leq (n-1)$

$$11(n-10) \leq (n-10)(K+1) \leq 10(n-1) \quad \text{يعني :}$$

$$(2) \quad \frac{1}{n(n-10)} \leq \frac{1}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{1}{11(n-10)} \quad \text{و منه :}$$

نضرب التاطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$\frac{10}{n(n-10)} \leq \frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{10(n-10)}{11(n-10)}$$

$$\frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{10}{11} \quad \text{و منه :}$$

$$u_k \leq 1 \quad \text{أي :}$$

② ② ■

$$u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \quad : 0 \leq k \leq 9 \quad \text{لدينا من أجل :}$$

$$p_{k+1} \geq p_k \quad \text{يعني :}$$

و منه المتتالية  $(p_k)_k$  تزايدية .

$$u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} \leq 1 \quad : 10 \leq k \leq n-1 \quad \text{من أجل :}$$

$$p_{k+1} \leq p_k \quad \text{يعني :}$$

و منه المتتالية  $(p_k)_k$  تناقصية .

نستنتج أن أكبر قيمة لهذه المتتالية هي :  $p_{10}$

$$M = p_{10} = C_n^{10} \left( \frac{10}{n-10} \right)^{10} \left( \frac{n-10}{n} \right)^n \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{n! \times 10^{10} \times (n-10)^n}{10! (n-10)! \times (n-10)^n \times n^n}$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n-10)^n}{(n-10)!}$$

■ (I) 4 (ب)

الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل :  $y = y_H + y_p$

بحيث  $y_p$  هو حل خاص للمعادلة (E) (نأخذه يساوي  $f$ )

و  $y_H$  هو حل المعادلة التفاضلية :  $y'' + 3y' + 2y = 0$  ; ( $E_H$ )

و لحلها نحل أولاً معادلتها المميزة :  $r^2 + 3r + 2 = 0$

و التي تقبل حلين حقيقيين  $r_1 = -1$  و  $r_2 = -2$  و ذلك بعد حساب

$$\Delta = 1$$

إذن :  $y_H = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x}$  /  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

و بالتالي : الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) يكتب على الشكل :

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} + f(x)$$

بحيث :  $\alpha$  و  $\beta$  عددين حقيقيين .

■ (II) 1 (أ)

يشير التكامل هندسياً إلى قياس طول أو مساحة أو حجم

$$A_n = \int_0^n f(x) dx = \int_0^n (1+x)e^{-2x} dx \quad \text{إذن :}$$

نضع  $u(x) = 1+x$  و منه :  $u'(x) = 1$

ثم نضع  $v'(x) = e^{-2x}$  و منه :  $v(x) = \frac{-1}{2}e^{-2x}$

باستعمال مكاملة بالأجزاء نحصل على :  $A_n = [uv] - \int u'v$

$$\Leftrightarrow A_n = \left[ \frac{-(1+x)e^{-2x}}{2} \right]_0^n + \frac{1}{2} \int_0^n e^{-2x} dx$$

$$\Leftrightarrow A_n = \left[ \frac{-(1+x)e^{-2x}}{2} \right]_0^n + \frac{1}{2} \left[ \frac{-e^{-2x}}{2} \right]_0^n$$

$$\Leftrightarrow A_n = \left( \frac{-(1+n)e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{-e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A_n = e^{-2n} \left( \frac{-(1+n)}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow A_n = e^{-2n} \left( \frac{-3-2n}{4} \right) + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow A_n = \frac{-e^{-2n}}{4} (2n+3) + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow A_n = \frac{3 - (2n+3)e^{-2n}}{4}$$

■ (I) 3 (أ)

لدينا :  $f'(x) = -(1+2x)e^{-2x}$

إذن :  $f''(x) = -2e^{-2x} + 2(1+2x)e^{-2x}$

$$\Leftrightarrow f''(x) = -2e^{-2x} + 2e^{-2x} + 4xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = 4xe^{-2x}$$

إذا كان :  $x = 0$  فإن :  $f''(x) = 0$

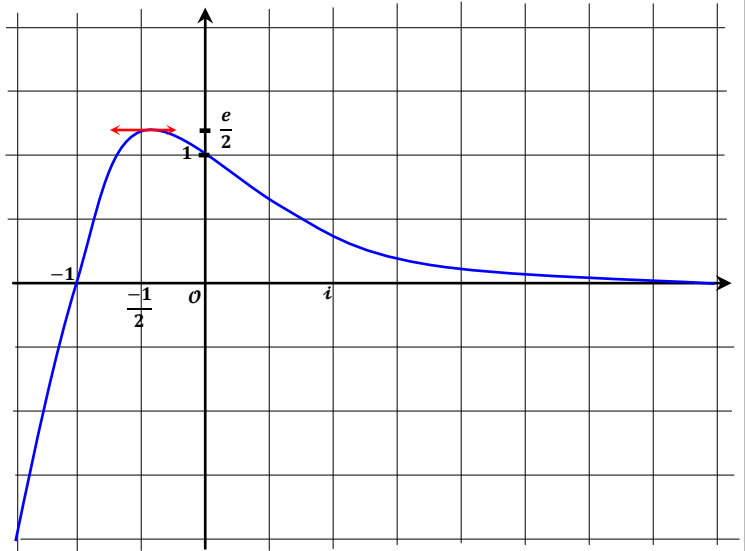
إذا كان :  $x > 0$  فإن :  $f''(x) > 0$

إذا كان :  $x < 0$  فإن :  $f''(x) < 0$

نستنتج إذن الجدول التالي :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
( $\mathcal{E}$ )	مُفَعَّر ( $\mathcal{E}$ )	$\Omega(0,1)$ نقطة انعطاف	مُحَدَّب ( $\mathcal{E}$ )

■ (I) 3 (ب)



■ (I) 4 (أ)

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)e^{-2x} \\ f'(x) = -(1+2x)e^{-2x} \\ f''(x) = 4xe^{-2x} \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} \text{إذن : } f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) &= 4xe^{-2x} - 3(1+2x)e^{-2x} + 2(1+x)e^{-2x} \\ &= (4x - 3 - 6x + 2 + 2x)e^{-2x} \\ &= -e^{-2x} \end{aligned}$$

إذن  $f$  حل خاص للمعادلة التفاضلية (E) :

$$(E) : y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow 1 - t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \int (1-t) dt \leq \int \left(\frac{1}{t+1}\right) dt \leq \int 1 dt$$

$$\Leftrightarrow t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

نعوض  $t$  بالقيمة  $\frac{x}{n}$  نحصل على :

$$\Leftrightarrow \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$$

نضرب أطراف هذا التأيير في العدد الموجب الغير المنعدم  $n$  نحصل على :

$$\Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$$

■ (III) 3 (i)

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$

لدينا حسب السؤال (2) ب

$$(\forall x \in [0, n]) , (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$$

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq x \quad \text{و منه :}$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x \quad \text{و منه :}$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب  $e^{-2x}$  نجد :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \leq e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx \leq \int_0^n e^{-x} dx$$

$$\Rightarrow u_n \leq \int_0^n e^{-x} dx \quad (*)$$

■ (III) 3 (b)

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$

لدينا حسب السؤال (2) ب

$$x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2n} \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow e^{\left(x - \frac{x^2}{2n}\right)} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

■ (II) 2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+3)e^{-2n} = \lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ m=2n+3}} e^3 \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - (2n+3)e^{-2n}}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{و منه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{3}{4} \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (III) 1

$$\text{نضع : } u_n = n \int_0^1 [f(x)]^n dx \quad ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

ثم نضع :  $t = nx$  و منه :  $dt = n dx$

إذا كان  $x = 0$  فإن  $t = 0$

إذا كان  $x = 1$  فإن  $t = n$

$$u_n = n \int_0^n \left[f\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \frac{dt}{n} \quad \text{و بالتالي :}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt$$

$$\Leftrightarrow u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt$$

■ (III) 2 (a)

ليكن :  $u \in [1, 2]$  يعني :  $1 \leq u \leq 2$

$$(1) \quad \frac{1}{u} \leq 1 \quad \text{و منه : } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u} \leq 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\text{و نعلم أن : } (u-1)^2 \geq 0 \quad ; (\forall u \in [1, 2])$$

$$\text{إذن : } u^2 - 2u + 1 \geq 0$$

$$\text{و منه : } u^2 + 1 \geq 2u$$

نضرب الطرفين في العدد الموجب الغير المنعدم  $\frac{1}{u}$  نحصل على :

$$\frac{u^2 + 1}{u} \geq 2$$

$$(2) \quad \frac{1}{u} \geq 2 - u \quad \text{أي : } u + \frac{1}{u} \geq 2 \quad \text{و منه :}$$

$$\text{من (1) و (2) نستنتج أن : } 2 - u \leq \frac{1}{u} \leq 1 \quad ; (\forall u \in [1, 2])$$

■ (III) 2 (b)

ليكن  $x \in [0, n]$  و  $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq \frac{x}{n} \leq 1 \quad \text{و منه : } 0 \leq x \leq n$$

$$\text{نضع : } t = \frac{x}{n} \quad \text{إذن : } 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{أي : } 1 \leq t+1 \leq 2$$

إذن حسب السؤال (2) (i)

$$2 - (t+1) \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$$



لدينا :  $0 < a < 1$  إذن :  $f(1) < f(a) < f(0)$

أي :  $2e^{-2} < f(a) < 1$  ومنه :  $\ln(f(a)) < \ln 1$

يعني :  $\ln(f(a)) < 0$

ولدينا :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1-a)(f(a))^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1-a)e^{n \ln(f(a))}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(f(a)) e^{n \ln(f(a))} \left( \frac{1-a}{\ln(f(a))} \right)$$

$$= \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m = n \ln(f(a))}} (me^m) \left( \frac{1-a}{\ln(f(a))} \right)$$

$$= 0 \times \left( \frac{1-a}{\ln(f(a))} \right) = 0$$

إذن حسب التآطير (#)

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_a^1 n(f(x))^n dx \leq \frac{n(1-a)(f(a))^n}{n \rightarrow \infty} \Rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^1 n(f(x))^n dx \right) = 0 \text{ و بالتالي :}$$

لدينا حسب نتيجة السؤال (3) (ج)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$

يعني :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 n(f(x))^n dx \right) = 1$

ومنه :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^a n(f(x))^n dx + \int_a^1 n(f(x))^n dx \right) = 1$

لدينا حسب نتيجة السؤال (4) (ب)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^1 n(f(x))^n dx \right) = 0$

إذن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^a n(f(x))^n dx \right) = 1 ; (\forall a \in ]0,1[)$$

و الحمد لله رب العالمين ■