



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول: (4,5 ن)

نذكر أن: $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة.

(I) لتكن G مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل:

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}; (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

① بين أن G جزء مستقر من: $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ 0,25 ن

② بين أن (G, \times) زمرة، هل هي تبادلية؟ 0,75 ن

③ لتكن \mathcal{H} مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}$ من G حيث $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بين أن \mathcal{H} زمرة جزئية للزمرة (G, \times) . 0,50 ن

④ ليكن A عنصرا من G حيث: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ 0,50 ن

نضع $A^1 = A$ و $A^2 = A \times A$ و $A^{n+1} = A^n \times A$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

أحسب A^n بدلالة a و n بحيث: ($n \in \mathbb{N}^*$).

(II) نعتبر في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ قانون التركيب الداخلي τ المعرف بما يلي:

$$(a,b) \tau (x,y) = (a + bx, by); (a,b), (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

ليكن φ التطبيق المعرف من G نحو $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بما يلي:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* : \varphi(M_{(a,b)}) = (a,b)$$

① بين أن φ تشاكل تقابلي من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \tau)$. 0,75 ن

② استنتج بنية المجموعة: $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \tau)$. 0,25 ن

③ حدد مماثل: $(a,1) \tau (a,1) \tau \dots \tau (a,1)$ في $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \tau)$ حيث $a \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$. 0,50 ن

التمرين الثاني: (2,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة: $(E) : x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$.

① ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) .

نضع $d = x \wedge y$ و $x = ad$ و $y = bd$.

أ) تحقق أن $b^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$. 0,25 ن

ب) استنتج أن $b = 1$. 0,75 ن

ج) بين أن $a \neq 1$ و $(a-1)$ يقسم $(a+1)$. 0,50 ن

د) استنتج أن $a = 2$ أو $a = 3$. 0,50 ن

② حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) . 0,50 ن

التمرين الثالث : (5,0 ن)نضع $(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = z^2 - (2 + 6i)z$

(I) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، نعتبر (\mathcal{H}) مجموعة النقط M ذات اللق z التي يكون من أجلها $P(z)$ عددا تخيليا صرفا .

① بين أن $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ معادلة ديكارتية للمجموعة (\mathcal{H}) . ن 0,50

② بين أن (\mathcal{H}) هذلول و حدد مركزه و رأسيه و معادلتى مقاربيه في $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. ن 1,00

③ تحقق أن النقطة O ، أصل المعلم ، تنتمي إلى المجموعة (\mathcal{H}) ثم أكتب في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (\mathcal{H}) في O . ن 0,50

④ أنشئ (\mathcal{H}) في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. ن 0,75

①(II) حل في \mathbb{C} المعادلة : $P(z) = 4 - 6i$. ن 0,50

② نضع $u = 1 + 5i$ و $v = 1 + i$ و $\omega = 239 - i$ و $\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ و $\beta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$

أ) تحقق أن : $u^4 \times v = 4\omega$. ن 0,50

ب) حدد بدلالة α عمدة العدد العقدي u و حدد بدلالة β عمدة العدد العقدي ω . ن 0,75

ج) استنتج أن : $4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$. ن 0,50

الجزء الأول في هذا الجزء : $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq 3$.

التمرين الرابع : (9,0 ن)

نعتبر الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي : $g_n(x) = nx + 2 \ln x$

① ضع جدول تغيرات الدالة g_n . ن 0,50

② بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*), \sqrt{x} > \ln x$. ن 0,50

③ أ) بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في \mathbb{R}_+^* . وأن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$. ن 0,75

ب) استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$. ن 0,25

الجزء الثاني

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x}$

ليكن (\mathcal{E}) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) مع $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\text{cm})$.

① أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة O ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها . ن 0,50

② أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا . ن 0,50

③ أ) بين أن : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$ (*) . ن 0,25

ب) ضع جدول تغيرات الدالة f . ن 0,25

④ أنشئ (\mathcal{E}) نأخذ : $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,5$. ن 0,50

(II) نضع : $I = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$

① ① بين أن : $f(I) = I$ ن 0,50

② ② باستعمال العلاقة (*), بين أن : $(\forall x \in I), |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ ن 0,50

③ ③ بين أن : $[f(x) = x \text{ و } x > 0] \Leftrightarrow x = \alpha_3$ ن 0,50

حيث α_3 هو حل المعادلة : $g_3(x) = 0$ الذي تم تعريفه في الجزء الأول.

④ ② لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$ و $u_0 = \frac{1}{3}$

① ① بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in I$ ن 0,25

② ② بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha_3| = \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$ ن 0,25

③ ③ استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha_3| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ ن 0,25

④ ④ بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة محددًا نهايتها . ن 0,50

(III) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{8x} f(t) dt$

① ① بين أن : F قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$. ن 0,25

② ② أحسب $F'(x)$ لكل x من $[0, +\infty[$ ثم استنتج تغيرات الدالة F . ن 0,75

③ ② بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*), 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$ ن 0,50

④ ② استنتج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ن 0,25

⑤ ③ ضع جدول تغيرات الدالة F . ن 0,25

■ (I) ①

في البداية نلاحظ أن : $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من G

إذن $d \neq 0$ و $b \neq 0$

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+bc & bd \end{pmatrix} \text{ و منه :}$$

بما أن $b \neq 0$ و $d \neq 0$ فإن $bd \neq 0$

و منه : $(a+bc ; bd) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

يعني : $M_{(a+bc, bd)} \in G$

و بالتالي G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

■ (I) ②

لدينا \times تجميعي في (G, \times)

لأن جزء مستقر من الزمرة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

و لدينا كذلك $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد لـ \times في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و بما أن $I \in G$ فإن I هو نفسه العنصر المحايد لـ \times في G ($I = M_{(0,1)}$)

ليكن $M_{(a,b)}$ عنصرا من G .

$M_{(a,b)}$ تقبل ممانثا (أو مقلوبا) في G بالنسبة لـ \times

إذا فقط إذا كان : $\det(M_{(a,b)}) \neq 0$

$$\text{لدينا : } \det(M_{(a,b)}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b - 0 = b$$

و بما أن : $M_{(a,b)} \in G$ فإن : $b \neq 0$

و منه : $\det(M_{(a,b)}) \neq 0$

إذن : $M_{(a,b)}$ تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و نذكرُ بالعلاقة المهمة التالية :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{إذن : } M_{(a,b)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det M_{(a,b)}} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{b} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = M_{\left(\frac{-a}{b}, \frac{1}{b}\right)}$$

و بما أن : $b \neq 0$ فإن : $\frac{1}{b} \neq 0$

و منه : $M_{\left(\frac{-a}{b}, \frac{1}{b}\right)} \in G$ أي : $M_{(a,b)}^{-1} \in G$

إذن : كل مصفوفة $M_{(a,b)}$ من G تقبل ممانثا $M_{\left(\frac{-a}{b}, \frac{1}{b}\right)}$ في G بالنسبة لـ \times

نختار المصفوفتين $M_{(1,1)}$ و $M_{(2,2)}$ من G لكي نبين أن \times ليس تبادليا في G

$$\text{لدينا : } M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{و } M_{(2,2)} \times M_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن : $M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} \neq M_{(2,2)} \times M_{(1,1)}$

إذن \times ليس تبادليا في G .

خلاصة : (G, \times) زمرة غير تبادلية.

■ (I) ③

ليكن a و b عددين حقيقيين .

لدينا : $\mathcal{H} = \{M_{(a,b)} \in G \mid b > 0\}$

لدينا حسب ما سبق $I = M_{(0,1)} \in G$

و بما أن $1 > 0$ فإن $M_{(0,1)} \in \mathcal{H}$

و منه : \mathcal{H} جزء غير فارغ من G

ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من \mathcal{H}

لدينا حسب ما سبق :

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}^{-1} = M_{(a,b)} \times M_{\left(\frac{-c}{d}, \frac{1}{d}\right)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a - \frac{bc}{d} & \frac{b}{d} \end{pmatrix}$$

بما أن $d > 0$ و $b > 0$ فإن : $\frac{b}{d} > 0$

و منه :

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a - \frac{bc}{d} & \frac{b}{d} \end{pmatrix} = M_{\left(\frac{a - \frac{bc}{d}}{\frac{b}{d}}, \frac{b}{d}\right)} \in \mathcal{H}$$

و بالتالي نستنتج أن (\mathcal{H}, \times) زمرة جزئية للزمرة (G, \times) .

ليكن a و b عددين حقيقيين.

$$(*) \quad M_{(a,1)} \times M_{(b,1)} = M_{(a+b;1)} \quad \text{لدينا}$$

إذن باستعمال العلاقة (*) نحصل على :

$$M_{(a_1,1)} \times M_{(a_2,1)} \times \cdots \times M_{(a_n,1)} = M_{((\sum_1^n a_i),1)}$$

$$M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \cdots \times M_{(a,1)} = M_{(na,1)} \quad \text{و منه}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; (M_{(a,1)})^n = M_{(na,1)} \quad \text{و بالتالي}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \quad \text{يعني}$$

و إن لم تكن هذه الطريقة مقنعة بما فيه الكفاية فعليك بالترجع :

1 (II) ■

لنكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ مصفوفتين من G .

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(a+bc, bd)} \quad \text{لدينا}$$

$$\varphi(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}) = \varphi(M_{(a+bc, bd)}) = (a + bc, bd) \quad \text{و منه}$$

و لدينا كذلك :

$$\varphi(M_{(a,b)}) \top \varphi(M_{(c,d)}) = (a, b) \top (c, d) = (a + bc ; bd)$$

و بالتالي :

$$\varphi(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}) = \varphi(M_{(a,b)}) \top \varphi(M_{(c,d)})$$

و منه φ تشاكل من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$.

ليكن (c, d) عنصرا من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

$$\varphi(M_{(x,y)}) = (c, d) \quad \text{لنحل المعادلة}$$

$$(x, y) = (c, d) \quad \text{التي تكافئ}$$

$$y = d \quad \text{و منه} \quad x = c$$

إذن المعادلة $\varphi(M_{(x,y)}) = (c, d)$ تقبل حلا وحيدا في

G و هو المصفوفة $M_{(c,d)}$.

و منه G تقابل من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$

خلاصة : تشاكل تقابلي من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$.

2 (II) ■

رأينا أن φ تشاكل تقابلي من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$

و نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

إذن نستنتج بنية $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$ انطلاقا من بنية (G, \times) عن طريق التطبيق φ

بما أن (G, \times) زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون \times هو

المصفوفة $M_{(0,1)}$ و أن كل مصفوفة $M_{(a,b)}$ من G تقبل مماثلا

$$M_{\left(\frac{-a}{b}, \frac{1}{b}\right)} \quad \text{في } G \text{ بالقانون } \times .$$

فإن $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون \top

هو $\varphi(M_{(0,1)})$ و أن كل زوج (c, d) من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ يقبل مماثلا

$$M_{\left(\frac{-c}{d}, \frac{1}{d}\right)} \quad \text{في } G \text{ بالقانون } \top .$$

إذن $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد $(0,1)$ و

كل عنصر (c, d) يقبل مماثلا و هو $M_{\left(\frac{-c}{d}, \frac{1}{d}\right)}$.

3 (II) ■

φ تشاكل .

تعريف التطبيق φ

$$(M_{(a,1)})^n = M_{(na,1)}$$

\top هو مماثل (c, d) بالنسبة لـ \top

باستعمال الأدوات التالية :

$$(a, 1) \top \cdots \top (a, 1) = (-na, 1) \quad \text{نبرهن بكل بساطة على أن}$$

$$[(a, 1) \top (a, 1) \top \cdots \top (a, 1)]' \quad \text{لدينا} \quad \text{_____}$$

$$= [\varphi(M_{(a,1)}) \top \varphi(M_{(a,1)}) \top \cdots \top \varphi(M_{(a,1)})]'$$

$$= [\varphi(M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \cdots \times M_{(a,1)})]'$$

$$= [\varphi((M_{(a,1)})^n)]'$$

$$= [\varphi(M_{(na,1)})]'$$

$$= \left(\frac{-na}{1}; \frac{1}{1}\right)$$

$$= (-na; 1)$$

1 أ

لدينا : (x, y) حل للمعادلة (E)

يعني : $x^2(x + y) = y^2(x - y)^2$

يعني : $(ad)^2(ad + bd) = (bd)^2(ad - bd)^2$

يعني : $a^2d^3(a + b) = b^2d^3(a - b)^2d$

نختزل بالعدد $d^3 \neq 0$ لأن

نحصل على : $a^2(a + b) = db^2(a - b)^2$

1 ب

للإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى أربع أدوات :

الأداة الأولى : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a^m \wedge b^n = 1 ; \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$

الأداة الثانية : (Gauss) $\begin{cases} a/bc \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a/b$

الأداة الثالثة : (Bezout)

$a \wedge b = d \Leftrightarrow \exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2 ; ma + nb = d$

الأداة الرابعة : $\begin{cases} a/b \\ a/c \end{cases} \Rightarrow \forall (m, n) \in \mathbb{Z} ; a/(mb + nc)$

ننطلق من كون (x, y) حل للمعادلة (E)

لدينا : $d = x \wedge y$

إذن حسب (Bezout) المباشرة : $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; xu + yv = d$

و منه : $adu + bdv = d$

نختزل بالعدد الغير المنعدم d نحصل على : $au + bv = 1$

و منه حسب (Bezout) العكسية : $a \wedge b = 1$

إذن حسب الأداة الأولى : (*) $a^2 \wedge b = 1$

بما أن الزوج (x, y) حل للمعادلة (E) فإنه حسب السؤال (أ)

$db^2(a - b)^2 = (a + b)a^2$

نضع : $k = bd(a - b)^2$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن : $(a + b)a^2 = kb$ و منه : $b / (a + b)a^2$

و بما أن : $a^2 \wedge b = 1$ حسب النتيجة (*) فإنه

حسب (Gauss) : $b / (a + b)$

و نعلم أن $b / (-b)$ إذن حسب الأداة الرابعة :

(1) b / a يعني $b / (a + b - b)$

و نعلم حسب ما سبق أن : (2) $a \wedge b = 1$

من (1) و (2) نستنتج أن : $b = 1$

1 ج

نفترض أن : $a = 1$ لدينا : $b = 1$ إذن : $x = d$ و $y = d$.بما أن (x, y) حل للمعادلة (E) فإن : $d^2(d + d) = d^2(d - d)^2$ يعني : $d = 0$ و هذا تناقض لأن $d = x \wedge y \neq 0$ و بالتالي : $a \neq 1$.

لدينا : $a - (a - 1) = 1$

إذن : $(\exists u, v \in \mathbb{Z}) ; au + (a - 1)v = 1$

و في هذه الحالة لدينا : $u = 1$ و $v = -1$

و منه حسب (Bezout) : $a \wedge (a - 1) = 1$

إذن حسب الأداة الأولى نستنتج أن : $a^2 \wedge (a - 1) = 1$ (**)

لدينا من جهة أخرى $b = 1$ إذن حسب السؤال (أ)

$(a + 1)a^2 = d(a - 1)^2$

نضع : $k = d(a - 1)$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن : $(a + 1)a^2 = k(a - 1)$ و منه : $(a - 1) / (a + 1)a^2$

من العلاقة (***) نستنتج حسب (Gauss) : $(a - 1) / (a + 1)$

1 د

لدينا : $(a - 1) / (a + 1)$ يعني : $a \equiv -1[a - 1]$

و نعلم أن : $(a \equiv 1[a - 1])$ (لأن $(a - 1) / (a - 1)$)

إذن : $1 \equiv -1[a - 1]$ يعني : $2 \equiv 0[a - 1]$

و منه : $(a - 1) / 2$

القواسم الصحيحة الطبيعية لـ 2 هي 1 و 2

إذن : $a - 1 = 1$ أو $a - 1 = 2$

يعني : $a = 2$ أو $a = 3$

و نبرهن بكل بساطة على أنه :

إذا كان : $a = 2$ فإن (x, y) يحقق المعادلة (E) .و إذا كان : $a = 3$ فإن (x, y) يحقق كذلك المعادلة (E) .

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - (y-3)^2 = -8$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(2\sqrt{2})^2} - \frac{(y-3)^2}{(2\sqrt{2})^2} = -1$$

إن: (\mathcal{H}) هذلول مركزه النقطة $C(1,0)$ ورأساه هما $B(1; 3 + 2\sqrt{2})$ و $B(1; 3 - 2\sqrt{2})$ ومقارباها هما المستقيمان (Δ) و (Δ') المعرفين بما يلي:

$$(\Delta'): y - 3 = 1 - x \quad \text{و} \quad (\Delta): y - 3 = x - 1$$

$$(\Delta'): y = 4 - x \quad \text{و} \quad (\Delta): y = x + 2 \quad \text{يعني}$$

③ (I) ■

الزوج $(0,0)$ يحقق معادلة المجموعة (\mathcal{H}) .

$$\text{لأن: } 0^2 - 0^2 - 2 \times 0 + 6 \times 0 = 0 \text{ إذن: } 0 \in (\mathcal{H})$$

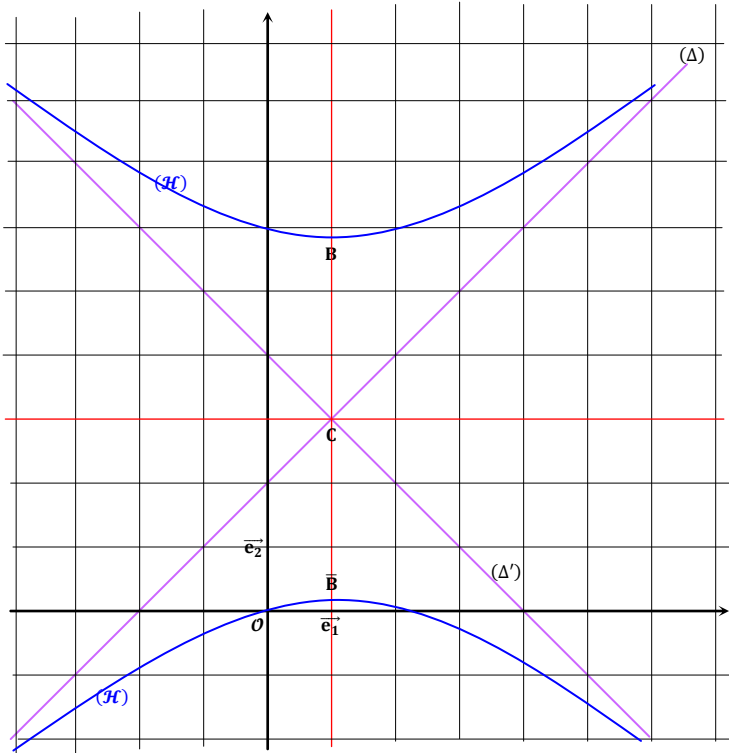
نعلم أن معادلة المماس (T_O) للهذلول (\mathcal{H}) في النقطة O تكتب على الشكل:

$$(T_O): xx_0 - yy_0 = (x + x_0) - 3(y + y_0)$$

$$\text{حيث: } x_0 = 0 \text{ و } y_0 = 0$$

$$(T_O): x - 3y = 0 \quad \text{ومنه}$$

④ (I) ■



لنحل المعادلة (E)

الحالة الأولى: إذا كان: $(a, b) = (2, 1)$

إن: $(x, y) = (2d, d)$

$$\text{ومنه: } (E): (2d)^2(2d + d) = d^2 d^2$$

$$\text{يعني: } (4d^2)(3d) = d^4 \text{ أي: } d = 12$$

وبالتالي: $(x, y) = (24, 12)$

الحالة الثانية: إذا كان: $(a, b) = (3, 1)$

إن: $(x, y) = (3d, d)$

$$\text{ومنه: } (E): (3d)^2(3d + d) = d^2(2d)^2$$

$$\text{يعني: } 36d^3 = 4d^4 \text{ أي: } d = 9$$

وبالتالي: $(x, y) = (27, 9)$

خلاصة: الزوجان $(24, 12)$ و $(27, 9)$ هما حلا المعادلة (E).

التمرين الثالث: (5,0 ن)

① (I) ■

نضع: $z = x + iy$ و M هي صورة العدد العقدي z

بحيث: x و y عددين حقيقيين.

$$\text{لدينا: } P(z) = z^2 - (2 + 6i)z$$

$$\Leftrightarrow P(z) = (x + iy)^2 - (2 + 6i)(x + iy)$$

$$\Leftrightarrow P(z) = x^2 - y^2 + 2ixy - (2x + 2iy + 6ix - 6y)$$

$$\Leftrightarrow P(z) = x^2 - y^2 + 2ixy - 2x - 2iy - 6ix + 6y$$

$$\Leftrightarrow P(z) = (x^2 - y^2 - 2x + 6y) + i(2xy - 2y - 6x)$$

و لدينا $P(z)$ عدد تخيلي صرف.

$$\text{إذن: } \Re(P(z)) = 0$$

$$\text{يعني: } x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$$

ومنه: $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ هي معادلة ديكارتية مميزة للنقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $P(z)$ عددا تخيليا.

② (I) ■

في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ المجموعة (\mathcal{H}) تتميز بالمعادلة:

$$(x^2 - y^2 - 2x + 6y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x) - (y^2 - 6y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) = -8$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{\sin(\alpha) + i\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow u = \left(\frac{1}{\sin(\alpha)}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow u = \left(\frac{1}{\sin(\alpha)}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

لدينا : $\sin(\alpha) \approx 0,19 \neq 0$

إذن : $\arg(u) \equiv \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) [2\pi]$

بنفس الطريقة لدينا : $\beta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$

$$\Leftrightarrow 239 = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow 239 - i = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} - i$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{\cos(\beta) - i\sin(\beta)}{\sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \left(\frac{1}{\sin(\beta)}\right) (\cos(-\beta) + i\sin(-\beta))$$

$$\Leftrightarrow \omega = \left(\frac{1}{\sin(\beta)}\right) e^{-\beta i}$$

$$\Leftrightarrow \arg(\omega) = -\beta [2\pi]$$

■ (II) 2 (ج)

أشير في البداية إلى أن $(1 + i) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\Rightarrow \arg(v) = \arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

و لدينا حسب السؤال (أ) $u^4 \times v = \omega$

$$\Rightarrow \arg(u^4 \times v) \equiv \arg(\omega) [2\pi]$$

$$\Rightarrow 4\arg(u) + \arg(v) \equiv \arg(\omega) [2\pi]$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\pi}{4} \equiv -\beta [2\pi]$$

$$\Rightarrow 4\alpha - \beta \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

■ (II) 1

لنحل في \mathbb{C} المعادلة : $P(z) = 4 - 6i$

$$\Leftrightarrow z^2 - (2 + 6i)z + (6i - 4) = 0$$

$$\Delta = (2 + 6i)^2 - 4(6i - 4) \quad \text{لدينا :}$$

$$= (4i)^2$$

$$z_1 = \frac{(2 + 6i) + 4i}{2} = 1 + 5i \quad \text{إذن :}$$

$$z_2 = \frac{(2 + 6i) - 4i}{2} = 1 + i \quad \text{و}$$

■ (II) 1 (2)

لدينا $u = 1 + 5i$ و $v = 1 + i$ و $\omega = 239 - i$

لدينا حسب مثلث (Pascal) :

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\boxed{1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1} \quad (a + b)^4 \text{ معاملات الحدودية :}$$

إذن :

$$u^4 = (1 + 5i)^4 = 1^4 + 4(5i) + 6(5i)^2 + 4(5i)^3 + (5i)^4$$

$$\Leftrightarrow u^4 = 1 + 20i - 150 - 500i + 625$$

$$\Leftrightarrow u^4 = 476 - 480i$$

$$\Leftrightarrow u^4 \times v = (476 - 480i)(1 + i)$$

$$\Leftrightarrow u^4 \times v = 476 + 476i - 480i + 480$$

$$\Leftrightarrow u^4 \times v = 956 - 4i$$

$$\Leftrightarrow u^4 \times v = 4(239 - i)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u^4 \times v = 4\omega}$$

■ (II) 2 (ب)

لدينا : $\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow \tan(\alpha) = \frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow 5 = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow 5i = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} i \quad \Leftrightarrow \boxed{1 + 5i = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} i + 1}$$

② ■

نضع : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; h(x) = \sqrt{x} - \ln x$

$$h'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}} - \ln x\right)'$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{2}{2x}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{x - 4}{2x(\sqrt{x} + 2)}$$

و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \frac{1}{2x(\sqrt{x} + 2)} > 0$

إذن إشارة $h'(x)$ متعلقة بإشارة $(x - 4)$.

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$

و : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

x	0	4	$+\infty$
$h'(x)$		-	+
h	$+\infty$	$2 - \ln 4$	$+\infty$

انطلاقاً من هذا الجدول نلاحظ أن قيمة دنوية للدالة h على \mathbb{R}_+^* انطلقاً من هذا الجدول نلاحظ أن قيمة دنوية للدالة h على \mathbb{R}_+^*

يعني أن : $(\forall x > 0) ; h(x) > 2 - \ln 4$

لدينا : $2 - \ln 4 \approx 0,6 > 0$

إذن : $\forall x > 0 ; h(x) > 0$

و منه : $\forall x > 0 ; \sqrt{x} > \ln x$

③ (i) ■

لدينا g_n دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$.

إذن g_n تقابل من $]0, +\infty[$ نحو $]0, +\infty[$

و لدينا : $g_n(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) \right[$
 $=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; 4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

نستعين بالآلة الحاسبة و نضبط وحدة قياس الزوايا على الراديان .

لدينا : $\alpha \approx 0,2 \text{ rad}$ و $\beta \approx 0,004 \text{ rad}$

و نلاحظ أن : $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$

و من هذين التأييرين نحصل على : $-1 < 4\alpha - \beta < 4$

أي : $-1 < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 4$

و منه : $-0,3 < k < 0,5$

إذن : $k = 0$

و بالتالي : $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$

$$4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{أي :}$$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

① ■

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; g_n(x) = nx + 2\ln x$

g_n دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* و هما $x \rightarrow nx$ و $x \rightarrow 2\ln x$.

و لدينا : $g_n'(x) = n + \frac{2}{x} = \frac{nx + 2}{x} > 0$

إذن g_n دالة تزايدية قطعاً على \mathbb{R}_+^* .

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$

x	0	$+\infty$
$g_n'(x)$		+
g_n	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{e^x} \right) \quad \text{② (I) ■}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} \right) \times \left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{+\infty} \right) \times \left(\frac{1}{+\infty} \right) = 0 \end{aligned}$$

إذن: (ℰ) يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ و هو محور الأفصيل.

③ (I) ■

ليكن x عنصرا من \mathbb{R}_+^* .

لدينا: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} e^{-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} e^{-x} - e^{-x} x^{\frac{1}{3}} \quad \text{إذن:}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (x^{\frac{1}{3}} e^{-x}) \left(\frac{1}{3} x^{-1} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (x^{\frac{1}{3}} e^{-x}) \left(\frac{1}{3x} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (x^{\frac{1}{3}} e^{-x}) \left(\frac{1-3x}{3x} \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x} \right) f(x)$$

③ (I) ■

$$f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x} \right) f(x) \quad \text{لدينا:}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^{-x} > 0 \quad \text{بما أن:}$$

$$(\forall x > 0) ; x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \ln x} > 0 \quad \text{و } 3x > 0$$

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة بـ $(1-3x)$

$$f'(x) = 0 \quad \text{إذا كان } x = \frac{1}{3} \quad \text{فإن:}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{إذا كان } x > \frac{1}{3} \quad \text{فإن:}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{إذا كان } x < \frac{1}{3} \quad \text{فإن:}$$

و لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

x	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	0	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	0

من جهة أخرى لدينا: $\left] \frac{1}{n}; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[\subset \mathbb{R}_+^*$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - 2\ln(n) \quad \text{و لدينا كذلك:}$$

$$1 - 2\ln(n) \leq 1 - 2\ln 3 \quad \text{علما أن } n \geq 3 \quad \text{نستنتج أن:}$$

$$1 - 2\ln(n) < 0 \quad \text{إذن: } 1 - 2\ln 3 \approx -1,2 \quad \text{لدينا}$$

$$(1) \quad g_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \quad \text{ومنه:}$$

و لدينا كذلك:

$$\begin{aligned} g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= n \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} + \ln\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sqrt{n} - \ln(n) \end{aligned}$$

بما أن $n > 0$ فإنه حسب السؤال ② $\sqrt{n} > \ln(n)$

$$(2) \quad g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0 \quad \text{ومنه: } \sqrt{n} - \ln(n) > 0 \quad \text{يعني}$$

$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times g_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \quad \text{من (1) و (2) نستنتج أن:}$$

نتوفر الآن على جميع الشروط اللازمة لتطبيق مبرهنة القيم الوسيطة.

$$\exists! \alpha_n \in \left] \frac{1}{n}; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[\quad / \quad g_n(\alpha_n) = 0 \quad \text{إذن:}$$

ومنه: المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في \mathbb{R}_+^* .

③ (I) ■

$$\begin{cases} \frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n) = 0 \quad \text{إذن:}$$

الجزء الثاني

① (I) ■

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt[3]{x} e^{-x}}{x} \right) \quad \text{لدينا:} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}} e^x} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

إذن f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

نستنتج أن (ℰ) يقبل مماسا رأسي موجهها نحو الأعلى في الصفر.

لدينا : $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$ أي : $x \geq \frac{1}{3}$

ومنه : $x > \frac{1}{5}$ يعني : $5x > 1$

يعني : $3x + 2x > 1$

يعني : $2x > 1 - 3x$

(*) يعني : $2 > \frac{1 - 3x}{x}$

ولدينا : $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$ أي : $x \leq 1$

ومنه : $1 - x \geq 0$ يعني : $1 - 3x + 2x \geq 0$

يعني : $1 - 3x \geq -2x$

(**) يعني : $\frac{1 - 3x}{x} \geq -2$

من (*) و (**) نستنتج أن : $-2 \leq \frac{1 - 3x}{x} < 2$

أي : (2) $\left| \frac{1 - 3x}{x} \right| \leq 2$

لدينا : $f'(x) = \left(\frac{1 - 3x}{3x}\right) f(x)$

$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - 3x}{x}\right) f(x)$

$\Rightarrow |f'(x)| = \frac{1}{3} \left| \frac{1 - 3x}{x} \right| |f(x)|$

من (1) و (2) نجد : $|f(x)| < 1$ و $\left| \frac{1 - 3x}{x} \right| \leq 2$

ومنه : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

■ (II) 1 ج

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعيا

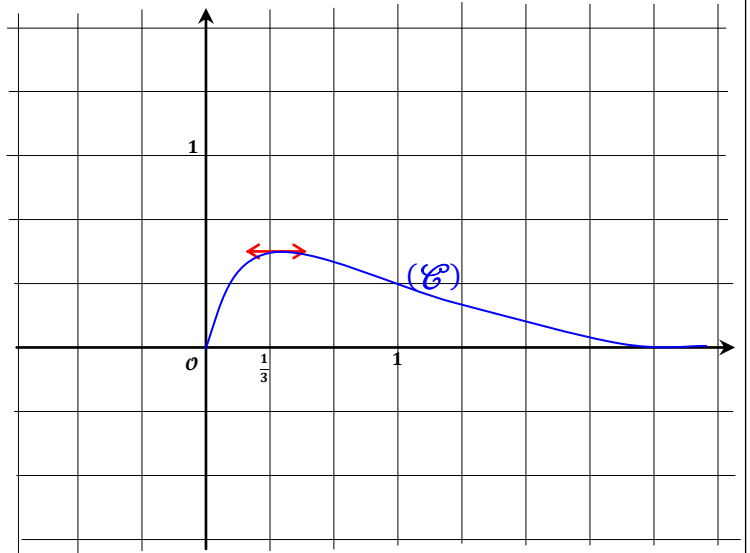
لدينا : $f(x) = x$ يعني : $\sqrt[3]{xe^{-x}} = x$

إذن : $xe^{-3x} = x^3$

نختزل بالعدد الغير المنعدم x نحصل على : $e^{-3x} = x^2$

ندخل الدالة \ln على هاتين الكميتين الموجبتين نحصل على : $-3x = 2\ln x$

■ (I) 4



■ (II) 1 ج

لدينا : $I = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$

ليكن : $y \in f(I)$

هذا يعني أن : $f(x) = y$; $(\exists x \in I)$

لدينا : $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ و f دالة تناقصية على I

إذن : $f\left(\frac{1}{3}\right) \geq f(x) \geq f(1)$

أي : $0,5 \geq y \geq 0,36$

ومنه : $1 > 0,5 \geq y > 0,36 \geq \frac{1}{3}$

إذن : $1 \geq y \geq \frac{1}{3}$

ومنه : $y \in I$

حصلنا إذن على الإستلزام التالي : $y \in f(I) \Rightarrow y \in I$

وبالتالي : $f(I) \subset I$

■ (II) 1 ب

لدينا : $f'(x) = \left(\frac{1 - 3x}{3x}\right) f(x)$; $(\forall x > 0)$

ليكن x عنصرا من $I = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$ إذن : $x \geq \frac{1}{3}$

ومنه : $f(x) \leq f\left(\frac{1}{3}\right)$ لأن f تناقصية على المجال $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$

يعني : $f(x) \leq 0,5 < 1$

ومنه : $f(x) < 1$

إذن : (1) $|f(x)| < 1$

$$|f(u_n) - f(\alpha_3)| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| \text{ : يعني}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| \text{ : إذن}$$

■ (II) 2 (ج)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

لدينا حسب السؤال (ب)

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha_3| &\leq \frac{2}{3} |u_{n-1} - \alpha_3| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) |u_{n-2} - \alpha_3| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) |u_{n-3} - \alpha_3| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_{n-n} - \alpha_3| \end{aligned}$$

$$(*) \text{ : إذن } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3|$$

$$\text{لدينا : } \alpha_3 \in I \text{ يعني : } \frac{1}{3} \leq \alpha_3 \leq 1$$

$$\text{و منه : } \frac{1}{3} - \alpha_3 \leq \frac{2}{3} \text{ أي : } \frac{-2}{3} \leq \frac{1}{3} - \alpha_3 \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{يعني : } |u_0 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ نحصل على :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\text{و نعلم أن } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3|$$

و ذلك حسب : (*)

$$\text{و بالتالي : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\text{يعني : } g_3(x) = 0 \text{ و } 3x + 2\ln x = 0$$

و نعلم حسب السؤال (3) (i) من الجزء الأول أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في \mathbb{R}_+^* بحيث : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\text{إذن : } x = \alpha_3 \text{ بحيث : } \frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

■ (II) 2 (i)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

نبرهن بالترجع على أن : $u_n \in I$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\text{من أجل } n = 0 \text{ لدينا : } I = \left[\frac{1}{3}; 1\right] \text{ و } u_0 = \frac{1}{3} \in I$$

إذن : $u_0 \in I$

نفترض أن : $u_n \in I$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

بما أن f متصلة على المجال I .

فإن : $u_n \in I \Rightarrow f(u_n) \in f(I)$

و نعلم أن : $f(I) \subset I$ و ذلك حسب السؤال (1) (i)

إذن : $f(u_n) \in f(I) \subset I$

و منه : $u_{n+1} \in I$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I$

■ (II) 2 (ب)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

$$\text{لدينا : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I \text{ (1)}$$

$$\text{و لدينا كذلك حسب نتيجة السؤال (ج) : } \frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{إذن : } \alpha_3 \in I \text{ (2)}$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $[u_n; \alpha_3] \subset I$

و بما أن f دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على I .

فإن f دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على : $[u_n; \alpha_3]$ كذلك

و منه : حسب مبرهنة التزايد المتنتهية :

$$\exists c \in]u_n, \alpha_3[; \frac{f(u_n) - f(\alpha_3)}{u_n - \alpha_3} = f'(c)$$

$$\text{و منه : } |f(u_n) - f(\alpha_3)| \leq |f'(c)| \times |u_n - \alpha_3|$$

$$\text{و بما أن : } |f'(x)| \leq \frac{2}{3} \text{ (حسب السؤال (ب))}$$

$$\text{فإن : } |f'(c)| |u_n - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$$

■ (III) 1 (ب)

ليكن x عنصرا من \mathbb{R}_+

لدينا : $F(x) = h(8x) - h(x)$

إذن : $F'(x) = 8h'(8x) - h'(x)$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 8\sqrt[3]{8x} e^{-8x} - \sqrt[3]{x} e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 8\left(8^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}\right)(e^{-x})(e^{-7x}) - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = (16e^{-7x} - 1)f(x)$$

و بما أن $\forall x \in [0, +\infty[; f(x) \geq 0$

فإن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(16e^{-7x} - 1)$

إذا كان : $x = \frac{\ln 16}{7}$ فإن : $F'(x) = 0$

إذا كان : $x > \frac{\ln 16}{7}$ فإن : $F'(x) < 0$

إذا كان : $x < \frac{\ln 16}{7}$ فإن : $F'(x) > 0$

و بالتالي : F دالة تزايدية على $\left[0, \frac{\ln 16}{7}\right]$ و تناقصية على $\left[\frac{\ln 16}{7}, +\infty\right[$

■ (III) 2 (أ)

ليكن x و t عددين حقيقيين موجبين بحيث : $x \leq t \leq 8x$

بما أن f دالة موجبة على : $[0, +\infty[$

فإن F دالة موجبة كذلك لأنها تكامل لدالة موجبة f .

و منه : $F(x) \geq 0$ (1)

ننطلق من الكتابة $t \leq 8x$ إذن : $t^{\frac{1}{3}} \leq (8x)^{\frac{1}{3}}$

نضرب طرفي المتفاوتة الأخيرة في العدد الموجب و الغير المنعدم e^{-t}

نحصل على : $e^{-t} t^{\frac{1}{3}} \leq e^{-t} (8x)^{\frac{1}{3}}$

بإدخال التكامل على طرفي هذه المتفاوتة نحصل على :

$$\int_x^{8x} e^{-t} t^{\frac{1}{3}} dt \leq \int_x^{8x} e^{-t} (8x)^{\frac{1}{3}} dt$$

■ (II) 2 (د)

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3$

بما أن : $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ متتالية هندسية أساسها محصور بين 1 و -1 فإن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$$

و منه : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3\right) = \alpha_3$

و $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3\right) = \alpha_3$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha_3$

■ (III) 1 (أ)

لدينا f دالة متصلة على $[0, +\infty[$

إذن : f متصلة على المجال $[0, x]$ كيفما كان x من \mathbb{R}_+ .

و منه : f تقبل دالة أصلية h على المجال $[0, x]$.

يعني : h قابلة للإشتقاق على $[0, x]$ بحيث : $h'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{8x} f(t) dt \quad \text{و لدينا} \\ &= \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{8x} f(t) dt \\ &= \int_0^{8x} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \\ &= h(8x) - h(0) - h(x) + h(0) \\ &= h(8x) - h(x) \end{aligned}$$

لدينا : $x > 0$ يعني : $8x > 0$

و منه : $x \rightarrow h(8x)$ قابلة للإشتقاق على : $[0, +\infty[$

لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على : $[0, +\infty[$

و بالتالي : F قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty[$ لأنها مجموع

دالتين قابلتين للإشتقاق على $[0, +\infty[$

$$\Leftrightarrow F(x) \leq (8x)^{\frac{1}{3}} \int_x^{8x} e^{-t} dt$$

$$\Leftrightarrow F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} [-e^{-t}]_x^{8x}$$

$$\Leftrightarrow F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} (-e^{-8x} + e^{-x})$$

$$\Leftrightarrow F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} e^{-x} (1 - e^{-7x})$$

$$\Leftrightarrow F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x}) \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall x \geq 0) ; 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$$

■ (III) 2 (ب)

ننطلق من التأيير : $0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$ (Evidente)

و لدينا حسب جدول تغيرات f $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2f(x)(1 - e^{-7x}) = 2 \times 0 \times (1 - 0) = 0$

و بالتالي : $0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$

$\begin{array}{ccc} +\infty & \searrow & +\infty \\ & & \searrow \\ & & 0 \end{array}$

أي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$

■ (III) 2 (ج)

نلخص النتائج التي تم التوصل إليها بخصوص الدالة F في الجدول التالي :

x	0	$\frac{\ln 16}{7}$	$+\infty$
$F'(x)$		+	-
F	0	$F\left(\frac{\ln 16}{7}\right)$	0

■ و الحمد لله رب العالمين ■