



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

**التمرين الأول : ( 2,0 ن )**

نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص A و B و C و D و E و F ، ( كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات )

- ① ما هو عدد إمكانيات توزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة ؟ 0,50 ن
- ② أحسب احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل . 0,50 ن
- ③ أحسب احتمال الحدث التالي : " مجموع عددي الكرات المحصل عليها من طرف الشخصين B و C يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص A . " 1,00 ن

**التمرين الثاني : ( 4,0 ن )**

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر التطبيق  $f$  المعروف من C نحو C بما يلي :

$$f(z) = \frac{1}{6} \left( (1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} \right)$$

- (I) حل في C المعادلة :  $f(z) = 0$  . 0,50 ن
- (II) نضع  $z_0 = 1$  و  $z_{n+1} = f(z_n)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  و نرمز بـ  $u_n$  لمعيار العدد العقدي  $z_n$  .
- ① (أ) بين أن :  $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$  0,50 ن
- (ب) استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  متقاربة و احسب نهايتها . 0,50 ن
- ② لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  نضع :  $S_n = \sum_{k=0}^n OM_k = OM_1 + \dots + OM_n$  0,50 ن
- و لكل  $k$  من  $\mathbb{N}$  نعتبر  $M_k$  صورة العدد العقدي  $z_k$  .
- (أ) بين أن  $S_n \leq 3$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$  . 0,50 ن
- (ب) بين أن المتتالية  $(S_n)_{n \geq 0}$  متقاربة (حساب نهاية  $(S_n)_{n \geq 0}$  غير مطلوب) 0,50 ن
- (III) نضع  $z = re^{i\theta}$  حيث  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  و  $r \in \mathbb{R}_+^*$  .
- ① بين أن :  $f(z) = \frac{2}{3}r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}}$  1,00 ن
- ② بين أن النقط  $M_1$  و  $M_2$  و ..... و  $M_n$  مستقيمة  $(n \in \mathbb{N}^*)$  . 0,50 ن

**التمرين الثالث : ( 3,5 ن )**المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .ليكن  $(\Gamma)$  المنحنى الذي معادلته  $2y^2 - 4y - 7x = 0$  .① (I) بين أن  $(\Gamma)$  شلجم و حدد رأسه و بؤرتيه. ن 0,75② أنشئ المنحنى  $(\Gamma)$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  . ن 0,25(II) نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة :  $(E) : 2(y - 1)^2 = 7x + 2$  .① (j) بين أن :  $y \equiv 0[7]$  أو  $y \equiv 2[7]$  ن 1,00(ب) استنتج أن مجموعة حلول المعادلة  $(E)$  هي : ن 0,50

$$S = \{(14K^2 - 4k ; 7k) / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(14k^2 + 4k ; 7k + 2) / k \in \mathbb{Z}\}$$

② حدد النقط  $M(x, y)$  من المنحنى  $(\Gamma)$  بحيث :  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  و  $x \wedge y = 9$  ن 1,00**التمرين الرابع : ( 3,0 ن )**① بين أن :  $(\forall t \in \mathbb{R}) ; \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{t}{(1+t^2)} - \frac{t}{(3+t^2)} + \frac{1}{(3+t^2)}$  ن 0,25② بين أن :  $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) ; \int_0^\alpha \frac{1}{(3+t^2)} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)$  ن 0,50③ نعتبر الدالة العددية  $F$  المعرفة على  $[0, \pi]$  بما يلي :  $F(x) = \int_0^x \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} du$  ن 0,50(j) بين أن  $F$  قابلة للإشتقاق على  $[0, \pi]$  . ن 0,50(ب) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير  $t = \tan \left( \frac{u}{2} \right)$  بين أن : ن 0,50

$$(\forall x \in [0, \pi[) ; F(x) = 2 \int_0^{\tan \frac{\pi}{2}} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

نذكر أن :  $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  و  $\sin u = \frac{2t}{1+t^2}$  حيث :  $t = \tan \frac{u}{2}$  و  $u \in [0, \pi[$ (ج) باستعمال السؤالين ① و ② بين أن : ن 0,75

$$(\forall x \in [0, \pi[) ; F(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left( \frac{\tan \left( \frac{x}{2} \right)}{\sqrt{3}} \right) + \ln \left( \frac{1 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)} \right)$$

④ باستعمال اتصال الدالة  $F$  بين أن :  $\int_0^\pi \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} du = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$  ن 0,50

**التمرين الخامس : (3,0 ن)**

في هذا التمرين  $x$  يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2

نعتبر الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$

ليكن  $(\mathcal{E}_n)$  التمثيل المبياني للدالة  $f_n$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

① (أ) أحسب :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  0,50 ن

ⓑ أدرس الفرعين اللانهائين للمنحنى  $(\mathcal{E}_n)$ . 0,75 ن

② أحسب  $f'_n(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ثم ضع جدول تغيرات الدالة  $f_n$ . 0,75 ن

③ (أ) بين أن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$  في  $\mathbb{R}$ . 0,50 ن

ⓑ بين أن :  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$  0,25 ن

Ⓒ بين أن  $e^x \geq x + 1$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R})$  ثم استنتج أن  $f_n(1) > 0$ . 0,75 ن

Ⓓ بين أن :  $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$  0,50 ن

④ أنشئ المنحنى  $(\mathcal{E}_2)$  ( نأخذ :  $\alpha_2 \approx 0,6$  ) 0,50 ن

⑤ (أ) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N})$  بحيث  $n \geq 2$  لدينا :  $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left( e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$  0,50 ن

ⓑ استنتج أن :  $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$  0,50 ن

Ⓒ بين أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة. 0,75 ن

⑥ (أ) باستعمال السؤال ③ بين أن :  $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$  0,50 ن

ⓑ استنتج أن :  $\frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2 \ln n}{n}$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$  0,50 ن

Ⓒ حدد :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$  0,25 ن

1 ■

توزيع أربع كرات مرقمة على 6 أشخاص يمكن أن يتم بخمس طرق مختلفة :

الطريقة الأولى : إعطاء شخص واحد الكرات الأربع.

الطريقة الثانية : إعطاء شخص واحد الكرة الأولى ثم نعطي الشخص الثاني الكرات الثلاث المتبقية.

الطريقة الثالثة : إعطاء شخص واحد كرتين و شخص ثاني كرتين.

الطريقة الرابعة : إعطاء شخص واحد كرة واحدة و شخص ثاني كرة واحدة و شخص ثالث كرتين.

الطريقة الخامسة : نعطي كل شخص كرة واحدة .

في الطريقة الأولى لدينا :

•  $C_6^1$  إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرات الأربع .

في الطريقة الثانية لدينا :

- $C_6^1$  إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه كرة واحدة
- و  $C_4^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه إياها
- و  $C_5^1$  إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرات الثلاث المتبقية.

في الطريقة الثالثة لدينا :

- $C_6^1$  إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرتين
- و  $C_4^2$  إمكانية لاختيار الكرتين.
- و  $C_5^1$  إمكانية لاختيار الشخص الآخر صاحب الكرتين المتبقيتين.

في الطريقة الرابعة لدينا :

- $C_6^1$  إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الأولى.
- و  $C_4^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و  $C_5^1$  إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثانية.
- و  $C_3^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و  $C_4^1$  إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرتين المتبقيتين.

في الطريقة الخامسة لدينا :

- $C_6^1$  إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الأولى.
- و  $C_4^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و  $C_5^1$  إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثانية.
- و  $C_3^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و  $C_4^1$  إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثالثة.
- و  $C_2^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و  $C_3^1$  إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الرابعة.
- و  $C_1^1$  إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.

ط 5	ط 4	ط 3	ط 2	ط 1	الطريقة :
8640	1440	180	120	6	عدد الإمكانيات

و بالتالي : عدد الإمكانيات لتوزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة هو :

$$6 + 120 + 180 + 1440 + 8640 = 10386$$

2 ■

الشخص A يمكنه أن يحصل على :

- كرة واحدة بـ  $C_4^1$  إمكانية.
- أو يحصل على كرتين بـ  $C_4^2$  إمكانية.
- أو يحصل على ثلاث كرات بـ  $C_4^3$  إمكانية.
- أو يحصل على أربع كرات بإمكانية واحدة .

إذن عدد الإمكانيات التي يحصل فيها الشخص A على كرة واحدة على الأقل هو :

$$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$$

و منه : احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل يساوي :

$$\frac{15}{10386} \approx 0,0015 \equiv 0,15\%$$

3 ■

إذا حصل الشخص C على كرة واحدة رقمها m و حصل الشخص B على كرة واحدة رقمها n فإن الشخص A سيحصل على (m + n) كرة و لدينا :

$$m + n + 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow m + n = 2$$

نعلم أن  $m \neq n$  إذن هذه المعادلة لا تقبل حولا في المجموعة

$$\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$$

و بالتالي نحن بصدد حدث مستحيل و احتمال وقوعه 0

(I) ■

نضع :  $z = x + iy$  ثم ننطلق من الكتابة :  $f(z) = 0$ 

$$\Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})(x + iy) + 2(x - iy) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - \sqrt{3}y) + i(-y + \sqrt{3}x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \sqrt{3}y = 0 \\ -y + \sqrt{3}x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \sqrt{3}y \\ 3x = \sqrt{3}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = x + i\sqrt{3}x$$

$$\Leftrightarrow z = x(1 + i\sqrt{3})$$

و منه : مجموعة حلول المعادلة  $f(z) = 0$  في  $\mathbb{C}$  تكتب على الشكل :

$$S = \{ x(1 + i\sqrt{3}) / x \in \mathbb{R} \}$$

(j) (II) ■

$$f(z) = \frac{1}{6}((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z}) \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow f(z_n) = \frac{1}{6}((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\bar{z}_n)$$

$$\Rightarrow |f(z_n)| = \left| \frac{1}{6}((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\bar{z}_n) \right|$$

نعلم أن :  $|z| = |\bar{z}|$  و  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  .

$$\Rightarrow |f(z_n)| \leq \frac{1}{6} |(1 + i\sqrt{3})z_n| + \frac{1}{6} |2\bar{z}_n| \quad \text{إذن :}$$

$$\Rightarrow |f(z_n)| \leq \left(\frac{1}{6}\right) 2|z_n| + \left(\frac{2}{6}\right) |z_n|$$

$$\Rightarrow |f(z_n)| \leq \frac{2}{3} |z_n|$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leq \frac{2}{3} |z_n|$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n$$

و نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما موجبا.

$$(\forall n \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n \quad \text{إذن :}$$

(b) (II) ■

$$(\forall n \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n \quad \text{لدينا :}$$

$$0 \leq u_n \leq \frac{2}{3} u_{n-1} \quad \text{من أجل } (n-1) \text{ نحصل على :}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{2}{3} u_{n-1}$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) u_{n-2}$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 u_{n-3}$$

⋮

⋮

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_{n-n}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_0 \quad \text{و بالتالي :}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \text{لدينا :}$$

لأن  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$  متتالية هندسية أساسها موجب و أصغر من 1و بالتالي :  $(u_n)_n$  متقاربة و تؤول إلى الصفر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0 \quad \text{يعني :}$$

(j) (II) ■

$$S_n = OM_0 + OM_1 + \dots + OM_n \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow S_n = |z_0| + |z_1| + \dots + |z_n|$$

$$\Leftrightarrow S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$(\forall n \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq u_n \leq \frac{2}{3} u_{n-1} \quad \text{و نعلم أن :}$$

$$\begin{cases} u_0 \leq 1 \\ u_1 \leq \left(\frac{2}{3}\right) \\ \vdots \\ u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{2r}{3} \left( \left( \frac{3\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4} \right) + \left( i \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4} - i \frac{\sin\theta}{4} \right) \right)$$

$$= \frac{2r}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta - \frac{1}{2} \sin\theta \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta - \frac{1}{2} \sin\theta \right) \right)$$

$$= \frac{2r}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{i}{2} \cos \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$= \frac{2r}{3} \cos \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{2r}{3} \cos \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

■ (III) ②

لدينا :  $f(z_{k-1})$  هو لحن النقطة  $M_k$  بحيث :  $k \in \{1, \dots, n\}$

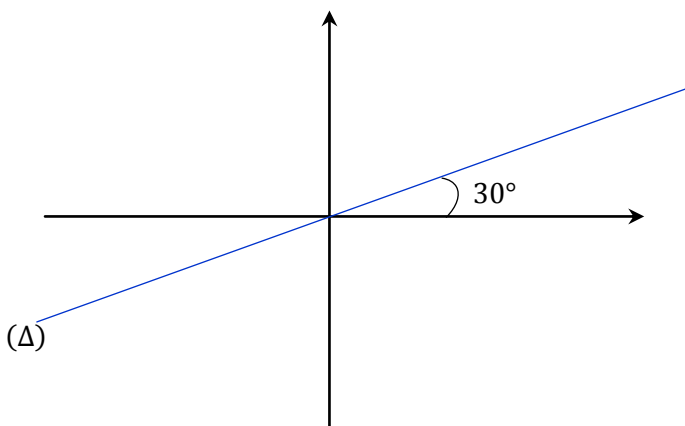
$$f(z) = \frac{2r}{3} \cos \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \quad \text{و لدينا :}$$

$$\Rightarrow f(z_{k-1}) = \frac{2r}{3} \cos \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow \arg(f(z_{k-1})) \equiv \arg \left( e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(f(z_{k-1})) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

و بالتالي النقط  $M_1$  و  $M_2$  و  $\dots$  و  $M_n$  تنتمي إلى نفس المستقيم  $(\Delta)$  المبين في الشكل التالي :



$$u_0 + u_1 + \dots + u_n \leq \sum_{k=0}^n \left( \frac{2}{3} \right)^k \quad \text{و منه :}$$

$$\Leftrightarrow S_n \leq \left( \frac{1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1}}{1 - \left( \frac{2}{3} \right)} \right)$$

$$\Leftrightarrow S_n \leq 3 \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \right)$$

$$\text{و لدينا : } \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \geq 0 \quad \text{إذن : } - \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \leq 0$$

$$\left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \right) \leq 1 \quad \text{و منه :}$$

$$3 \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \right) \leq 3 \quad \text{يعني :}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n \leq 3 \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (II) ② ب

$$S_n = OM_0 + OM_1 + \dots + OM_n \quad \text{لدينا :}$$

نلاحظ أن :

$$(OM_0 + \dots + OM_n) + OM_{n+1} > (OM_0 + \dots + OM_n)$$

$$S_{n+1} > S_n \quad \text{إذن :}$$

إذن  $(S_n)_n$  متتالية تزايدية

و بما أنها مكبورة بالعدد 3 (يعني :  $S_n \leq 3$ ) فإنها متقاربة.

■ (III) ①

$$f(z) = \frac{1}{6} \left( (1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{6} (r(1 + i\sqrt{3})e^{i\theta} + 2re^{-i\theta})$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{2r}{3} \left( \left( \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) e^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{2} \right)$$

$$= \frac{2r}{3} \left( \left( \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{2} (\cos\theta - i\sin\theta) \right)$$

$$= \frac{2r}{3} \left( \frac{\cos\theta}{4} + i \frac{\sin\theta}{4} + i \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4} + \frac{\cos\theta}{2} - i \frac{\sin\theta}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{2r}{3} \left( \frac{3\cos\theta}{4} + i \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4} - i \frac{\sin\theta}{4} \right)$$

$$2y^2 - 4y - 7x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(y^2 - 2y) = 7x$$

$$\Leftrightarrow 2(y - 1)^2 = 7x + 2$$

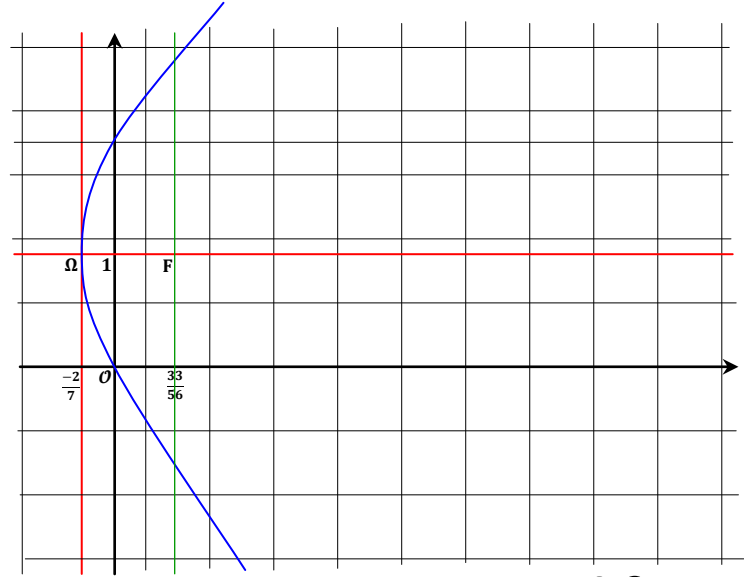
$$\Leftrightarrow (y - 1)^2 = \frac{7}{2}x + 1$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)^2 = \frac{7}{2}\left(x + \frac{2}{7}\right)$$

$$\text{إذن } (\Gamma) \text{ شلجم رأسه : } \Omega\left(-\frac{2}{7}; 1\right)$$

$$\text{و بؤرته : } F\left(\frac{7}{8} - \frac{2}{7}; 0 + 1\right)$$

$$\text{يعني : } F\left(\frac{33}{56}; 1\right)$$



$$2(y - 1)^2 = 7x + 2 \quad \text{لدينا}$$

$$\Leftrightarrow 2(y^2 - 2y + 1) = 7x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2y(y - 2) = 7x$$

$$\Leftrightarrow 7 / 2y(y - 2)$$

و بما أن العدد 7 أولي فإن :

$$\Leftrightarrow 7/2 \quad \text{أو} \quad 7/y \quad \text{أو} \quad 7/(y - 2)$$

$$\Leftrightarrow y \equiv 0[7] \quad \text{أو} \quad y \equiv 2[7]$$

في حالة :  $y \equiv 0[7]$

لدينا :  $y = 7k$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

و لدينا :  $2y(y - 2) = 7x$

يعني :  $2(7k)(7k - 2) = 7x$

إذن :  $x = 14k^2 - 4k$

و في حالة :  $y \equiv 2[7]$

لدينا :  $y = 7k + 2$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

و لدينا :  $2y(y - 2) = 7x$

يعني :  $2(7k + 2)(7k) = 7x$

إذن :  $x = 14k^2 + 4k$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \{(14k^2 - 4k; 7k), (14k^2 + 4k; 7k + 2) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

لدينا :  $x \wedge y = 9$

في حالة :  $x = 14k^2 - 4k$  و  $y = 7k$

لدينا حسب خوارزمية إقليدس :

$14k^2 - 4k$	$7k$
$-4k$	$2k$

إذن من هذه القسمة الأقليدية نستنتج أن :

$$(14k^2 - 4k) \wedge (7k) = (7k) \wedge (-4k) = k$$

لأن :  $7 \wedge (-4) = 1$

و منه :  $x \wedge y = k = 9$

و منه نحصل على النقطة :  $M_1(1098; 63)$

■ (3) (أ)

$$u \rightarrow \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \quad \text{لدينا :}$$

دالة متصلة على المجال  $[0, \pi]$  لأنها خارج معرف لدالتين متصلتين على  $[0, \pi]$  بحيث :  $2 + \cos u \neq 0$

إذن فهي تقبل دالة أصلية  $F$  على المجال  $[0, \pi]$ .

يعني  $F$  قابلة للإشتقاق على المجال  $[0, \pi]$ .

$$F'(x) = \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \quad \text{و لدينا :}$$

■ (3) (ب)

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $[0, \pi[$

$$F(x) = \int_0^x \left( \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{dt}{du} = \frac{1 + t^2}{2} \quad \text{نضع :} \quad t = \tan\left(\frac{u}{2}\right) \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \left( \frac{1 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}{2 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \right) \left( \frac{2}{1+t^2} \right) dt \quad \text{و منه :}$$

$$F(x) = 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

■ (3) (ج)

$$F(x) = 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

$$= 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2} \right) dt$$

$$= 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \left( \frac{t}{1+t^2} \right) dt - 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \left( \frac{t}{3+t^2} \right) dt + 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \left( \frac{1}{3+t^2} \right) dt$$

$$= [\ln(1+t^2)]_0^{\tan(\frac{x}{2})} - [\ln(3+t^2)]_0^{\tan(\frac{x}{2})} + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

في حالة :  $x = 14k^2 + 4k$  و  $y = 7k + 2$

$$14k^2 + 4k = 2k(7k + 2) \quad \text{لدينا :}$$

إذن من هذه النتيجة نستنتج أن :

$$(14k^2 + 4k) \wedge (7k + 2) = (7k + 2)$$

$$x \wedge y = 7k + 2 = 9 \quad \text{و منه :}$$

$$k = 1 \quad \text{يعني :}$$

و منه نحصل على النقطة :  $M_2(18; 9)$

التمرين الرابع : (3,0 ن)

■ (1)

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2} = \frac{t}{1+t^2} + \frac{1-t}{3+t^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{t(3+t^2) + (1-t)(1+t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

$$= \frac{t^2 + 2t + 1}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

$$= \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

ملاحظة : المسار العكسي لهذه المتساوية ستتم دراسته بتفاصيله في السنة الأولى من الأقسام التحضيرية أو الأسدس الثاني من الجامعة أو السنة الأولى من (BTS). و هذه العملية تسمى :

< la décomposition d'une fraction rationnel en éléments simples >

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \quad \text{مثال :}$$

■ (2)

$$\int_0^\alpha \left( \frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{1}{3} \int_0^\alpha \left( \frac{1}{1+\frac{t^2}{3}} \right) dt \quad \text{لدينا :}$$

$$dt = \sqrt{3} du \quad \text{نضع :} \quad u = \frac{t}{\sqrt{3}} \quad \text{إذن :}$$

$$\int_0^\alpha \left( \frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}} \left( \frac{1}{1+u^2} \right) dt \quad \text{و منه :}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha \left( \frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{\sqrt{3}}{3} [\text{Arctan } u]_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha \left( \frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)$$

⊖ ① ■

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}} \right) = \frac{1}{n} \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f_n(x) - \frac{1}{n}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-nx}) = 0 \quad \text{و لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \quad \text{كما نعلم أن :}$$

إذن من هذه النتائج نستنتج أن المستقيم  $y = \frac{1}{n}x$  مقارب مائل بجوار  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}} \right) = +\infty \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

(\*)

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left( \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) + \ln \left( \frac{1 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)} \right) \right) = \int_0^\pi \left( \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty \quad \text{و نعلم أن :}$$

إذن  $(\mathcal{E}_n)$  يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتيب نحو الأسفل.

② ■

$$f'_n(x) = \left( \frac{x}{n} - e^{-nx} \right)' = \frac{1}{n} + ne^{-nx} > 0$$

إذن  $f_n$  دالة تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$ .

نستنتج جدول تغيرات الدالة  $f_n$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
$f_n$	$-\infty$	$+\infty$

⊖ ③ ■

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة  $f_n$ .

$f_n$  دالة متصلة و تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$ .

إذن  $f_n$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$ .

بما أن  $0 \in \mathbb{R}$  فإنه يمتلك سابقاً واحداً  $\alpha_n$  من  $\mathbb{R}$  بالتقابل  $f_n$ .

و بالتالي :  $(\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}) ; f_n(\alpha_n) = 0$

$$= \ln \left( 1 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) - \ln \left( 3 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) + \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right)$$

$$= \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) + \ln \left( \frac{1 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)} \right)$$

⊖ ③ ■

لدينا  $F$  متصلة على يسار  $\pi$  إذن :  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = F(\pi)$

إذن :

و لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \ln \left( \frac{1 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)} \right) = \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u = \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)}} \ln \left( \frac{1 + \frac{1}{u}}{1 + \frac{3}{u}} \right) = \ln 1 = 0$$

و لدينا كذلك :

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} (" + \infty ") = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

نعوض هاتين النهايتين في المتساوية (\*) نحصل على :

$$\ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} = \int_0^\pi \left( \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du$$

التمرين الخامس : (3,0 ن)

⊖ ① ■

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{n} - e^{-nx} \right) = (+\infty) - 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \frac{1}{n} - \frac{e^{-nx}}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}} \right)$$

$$= (-\infty) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{0^-} \right)$$

$$= -\infty$$

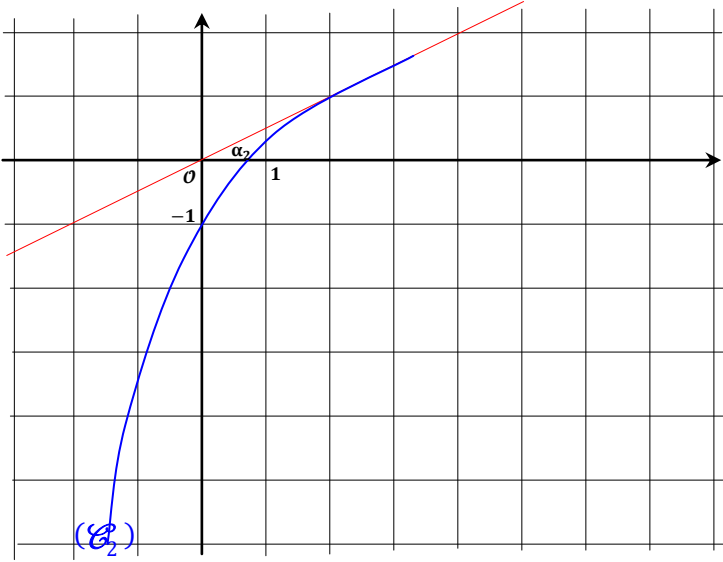
و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطة :

$$\exists c \in \left] \frac{1}{n}, 1 \right[ ; f_n(c) = 0$$

و بما أن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا و هو  $\alpha_n$ .

$$\frac{1}{n} < \alpha_n < 1 \quad \text{فإن } \alpha_n = c \quad \text{ومنّه :}$$

■ (4)



■ (5) (j)

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n+1} - e^{-(n+1)\alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n - ne^{-(n+1)\alpha_n} - e^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left( \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} - 1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$\text{و نعلم أن : } f_n(\alpha_n) = 0 \quad \text{إذن : } e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = \frac{\alpha_n}{n(e^{-n\alpha_n}) \cdot e^{-\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = \frac{\alpha_n}{n \cdot \left(\frac{\alpha_n}{n}\right) \cdot e^{-\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = e^{\alpha_n}$$

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left( e^{\alpha_n} - 1 - \frac{1}{n} \right) \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (3) (ب)

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{e}\right)$$

بما أن :  $n \geq 2$  فإن :  $n^2 \geq 4$ .

$$\text{أي : } n^2 \geq 4 > e \quad \text{ومنّه : } \frac{1}{n^2} < \frac{1}{e}$$

$$\text{يعني : } \frac{1}{n^2} - \frac{1}{e} < 0$$

$$\text{و بالتالي : } (\forall n \geq 2) ; f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$$

■ (3) (ج)

$$\text{نضع : } \varphi(x) = e^x - x - 1 \quad \text{إذن : } \varphi'(x) = e^x - 1$$

و منه : نستنتج جدول تغيرات الدالة  $\varphi$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	$0$	$+$
$\varphi$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

بما أن دالة متصلة على  $\mathbb{R}$  و قيمتها الدنيا حسب الجدول هي 0

$$\text{فإنه : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) \geq 0$$

$$\text{يعني : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$$

و من هذه المتفاوتة نستنتج :  $e^n \geq n + 1$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\text{و منه : } e^n \geq n \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^n} < \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow e^{-n} < \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{n} - e^{-n} > 0 \right) \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow f_n(1) = \frac{1}{n} - e^{-n} > 0$$

■ (3) (د)

لدينا دالة متصلة على  $\mathbb{R}$ .

إذن فهي متصلة على  $\left] \frac{1}{n} ; 1 \right]$  بحيث :  $n \geq 2$ .

$$\text{و لدينا : } f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \quad \text{و} \quad f_n(1) > 0$$

$$\text{إذن : } f_n(1) \cdot f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$$

6 ا

ليكن  $n \geq 2$ .

$$e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n} \quad \text{لدينا : } f_n(\alpha_n) = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{\alpha_n}{n} < \frac{1}{n} \quad \text{إذن : } \frac{1}{n} < \alpha_n < 1$$

$$\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n} \quad \text{و بالتالي :}$$

6 ب

$$\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n} \quad \text{لدينا :}$$

$$\ln\left(\frac{1}{n^2}\right) < \ln(e^{-n\alpha_n}) < \ln\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{إذن :}$$

لأن الدالة  $\ln$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}_+^+$ .

$$-2 \ln(n) < -n\alpha_n < -\ln(n) \quad \text{و منه :}$$

$$\ln(n) < n\alpha_n < 2\ln(n) \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln(n)}{n} \quad \text{و بالتالي :}$$

6 ج

من التأطير الثمين الأخير الذي حصلنا عليه نستنتج أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2\ln n}{n}\right) = 0 \quad \text{لأن :}$$

و الحمد لله رب العالمين ■

5 ب

$$e^{\alpha_n} \geq \alpha_n + 1 \quad \text{لدينا حسب السؤال : (3) ج}$$

$$\alpha_n > \frac{1}{n} \quad \text{و لدينا حسب السؤال : (3) د}$$

$$e^{\alpha_n} > \frac{1}{n} + 1 \quad \text{إذن : (##)}$$

$$e^{\alpha_n} \geq \frac{1}{n} + 1 \quad \text{من (##) و (##) نستنتج أن :}$$

$$e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \geq 0 \quad \text{يعني :}$$

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0 \quad \text{و بالتالي :}$$

$$\text{لأن الكمية } \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \text{ موجبة دائماً .}$$

5 ج

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 \quad \text{لدينا : (*)}$$

$$f_{n+1}(x) = 0 \quad \text{لأن حل للمعادلة :}$$

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0 \quad \text{و لدينا : (**)}$$

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \quad \text{من (*) و (**): نستنتج أن :}$$

و بما أن  $f_{n+1}$  دالة تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$ .

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1} \quad \text{فإن :}$$

$$(1) \quad (\alpha_n)_n \text{ تناقصية .}$$

$$\frac{1}{n} < \alpha_n \quad \text{و} \quad \frac{1}{n} > 0 \quad \text{و لدينا :}$$

$$\alpha_n > 0 \quad \text{إذن :}$$

$$(2) \quad (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ مصغورة بالعدد } 0 \quad \text{يعني :}$$

من (1) و (2) نستنتج أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة. و سوف نحدد نهايتها فيما بعد.