



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
-الدورة العادية 2008-  
الموضوع

المعامل:	9	الماديات:	الرياضيات
مدة الإنجاز:	4س	الشعب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

التمرين الأول: (3,25 نقطة)

نذكر أن  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة و  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي و  $(\mathbb{C}, +, \times)$  جسم تبادلي.  
نضع:

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ و } J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \text{ و } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) أ) بين أن  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  0,75

ب) بين أن الأسرة  $(I, J)$  أساس في الفضاء المتجهي  $(E, +, \cdot)$  0,5

(2) نعتبر التطبيق:  $f: \mathbb{C}^* \longrightarrow E^*$   
 $a + ib \longrightarrow M(a, b)$   
حيث:  $E^* = E \setminus \{M(0, 0)\}$

أ) بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$  0,25

ب) بين أن  $f$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو  $(E^*, \times)$  0,5

3) بين أن  $(E, +, \times)$  جسم تبادلي. 0,5

4) حل في  $E$  المعادلة:  $J \times X^3 = I$  (حيث  $X^3 = X \times X \times X$ ) 0,75

التمرين الثاني: (3,75 نقطة)

ليكن  $a$  عددا عقديا غير منعدم و  $\bar{a}$  مرافق العدد  $a$ .

I- نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $(G) \quad iz^2 + (a + \bar{a} - i)z - \bar{a} - ia\bar{a} = 0$

(1) أ) تحقق أن مميز المعادلة  $(G)$  هو:  $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$  0,5

ب) حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(G)$ . 0,5

(2) بين أن  $a$  حل للمعادلة  $(G)$  إذا و فقط إذا كان  $\text{Re}(a) = \text{Im}(a)$  (حيث  $\text{Re}(a)$  هو الجزء

الحقيقي للعدد العقدي  $a$  و  $\text{Im}(a)$  هو جزءه التخيلي)

الصفحة
2 / 4

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
(الدورة العادية 2008)  
الموضوع

C: NS24

المادة :	الرياضيات
----------	-----------

الشعب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
-----------	--------------------------------

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نفترض أن  $\text{Re}(a) \neq \text{Im}(a)$   
نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي هي  $a$  و  $i\bar{a}$  و  $1+ia$

$$Z = \frac{(1+ia) - a}{(i\bar{a}) - a} \quad (1) \quad \text{نضع :}$$

$$\bar{Z} = \frac{(i-1)\bar{a} - i}{i\bar{a} - a} \quad (أ) \quad \text{تحقق أن :} \quad 0,5$$

$$\text{Im}(a) = \frac{1}{2} \quad (ب) \quad \text{بين أن النقط A و B و C مستقيمة إذا و فقط إذا كان} \quad 0,5$$

$$(2) \quad \text{نفترض في هذا السؤال أن} \quad \text{Im}(a) \neq \frac{1}{2}$$

نعتبر  $R_1$  الدوران الذي مركزه A و زاويته  $-\frac{\pi}{2}$  و  $R_2$  الدوران الذي مركزه A و زاويته  $\frac{\pi}{2}$

$$\text{نضع : } R_1(B) = B' \text{ و } R_2(C) = C'$$

لتكن النقطة E منتصف القطعة [BC]

(أ) حدد  $b'$  و  $c'$  لحقي النقطتين  $B'$  و  $C'$  على التوالي . 0,5

(ب) بين أن المستقيمين (AE) و (B'C') متعامدان و أن  $B'C' = 2AE$  0,75

**التمرين الثالث: (3 نقط)**

I- نعتبر في المجموعة  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة التالية :  $35u - 96v = 1$  (E)

(1) تحقق أن الزوج (11,4) حل خاص للمعادلة (E) 0,25

(2) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) 0,5

II- نعتبر في المجموعة  $\mathbb{N}$  المعادلة التالية:  $x^{35} \equiv 2 [97]$  (F)

(1) ليكن x حلا للمعادلة (F)

(أ) بين أن العدد 97 أولي و أن x و 97 أوليان فيما بينهما . 0,5

(ب) بين أن :  $x^{96} \equiv 1 [97]$  0,5

(ج) بين أن :  $x \equiv 2^{11} [97]$  0,5

(2) بين أنه إذا كان العدد الصحيح الطبيعي x يحقق  $x \equiv 2^{11} [97]$  فإن x حل للمعادلة (F) 0,25

(3) بين أن مجموعة حلول المعادلة (F) هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تكتب على 0,5

الشكل  $11+97k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

الصفحة
3 / 4

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
(الدورة العادية 2008)  
الموضوع

C: NS24

المادة :	الرياضيات
----------	-----------

الشعب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
-----------	--------------------------------

التمرين الرابع: (10 نقط)

I – لتكن  $f$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $\mathbb{R}_+$  بما يلي :  $f(x) = 2x - e^{-x^2}$  و ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ) احسب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$  ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها. 0,5

ب) احسب  $f'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}_+$  ثم ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  0,5

ج) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}_+$  و أن  $0 < \alpha < 1$  0,5

د) ادرس إشارة  $f(x)$  على المجال  $[0,1]$  0,5

(2) أنشئ المنحنى  $(C)$ . (نأخذ :  $\alpha \approx 0,4$ ) 0,5

II – نعتبر الدالتين العدديتين  $\varphi$  و  $g$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفتين على  $\mathbb{R}_+$  بما يلي :

$$g(x) = x^2 - \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{و} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt ; x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

(1) أ) بين أن :  $\left( \forall x \in \mathbb{R}_+^* \right) \left( \exists c \in ]0, x[ \right) : \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$  0,5

ب) استنتج أن :  $\int_0^1 e^{-t^2} dt < 1$  0,5

(2) أ) بين أن :  $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt$  0,5

ب) بين أن الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}_+$  و أن :  $g'(x) = f(x)$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R}_+)$  0,5

ج) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\beta$  في المجال  $] \alpha, 1[$  0,5

(3) أ) بين أن الدالة  $\varphi$  متصلة على اليمين في الصفر. 0,5

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :  $\varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$  0,5

ج) بين أن الدالة  $\varphi$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}_+^*$  و أن :  $\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$  0,75

د) بين أن :  $\varphi([0,1]) \subset ]0,1[$  0,5

(4) أ) بين أنه لكل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}_+$  لدينا :  $\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3}$  0,5

الصفحة
4 / 4

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
(الدورة العادية 2008)  
الموضوع

C: NS24

المادة :	الرياضيات
----------	-----------

الشعب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
-----------	--------------------------------

(ب) بين أن : $(\forall x \in ]0,1[);  \varphi'(x)  \leq \frac{2}{3}$	0,5
(ج) بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \varphi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$	0,25
(5) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = \frac{2}{3}$ و $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )	
(أ) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$	0,5
(ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ;  u_n - \beta  \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$	0,5
(ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة و حدد نهايتها.	0,5

لدينا  $E$  جزء غير فارغ من  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  لأن :  $M(0,0) \in E$ .

ليكن  $\gamma$  و  $\beta$  عددين حقيقيين و  $M(a,b)$  و  $M(c,d)$  مصفوفتين من  $E$ .

$$\begin{aligned} \gamma M(a,b) + \beta M(c,d) &= \gamma \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c & \sqrt{3}d \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma a + \beta c & \sqrt{3}(\gamma b + \beta d) \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}(\gamma b + \beta d) & \gamma a + \beta c \end{pmatrix} \\ &= M(\gamma a + \beta c, \gamma b + \beta d) \in E \end{aligned}$$

إذن :

$(\forall \gamma, \beta \in \mathbb{R}), (\forall M(a,b), M(c,d)) : \gamma M(a,b) + \beta M(c,d) \in E$

إذن :  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

من الواضح أن الأسرة  $(I, J)$  مولدة للفضاء المتجهي  $(E, +, \cdot)$ .

لأن :  $(\forall M(a,b) \in E) : M(a,b) = \alpha I + \beta J$

لتكن  $\alpha I + \beta J$  تآليفة خطية منعومة للمصفوفتين  $I$  و  $J$ .

$$\Leftrightarrow \alpha I + \beta J = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{3}\beta \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن  $(I, J)$  أسرة حرة (أو مستقلة خطيا)

و بالتالي  $(I, J)$  أساس للفضاء المتجهي  $(E, +, \cdot)$ .

لتكن  $M(a,b)$  و  $M(c,d)$  مصفوفتين من الفضاء المتجهي  $E$

$$\begin{aligned} M(a,b) \times M(c,d) &= (\alpha I + \beta J) \times (\gamma I + \delta J) \\ &= \alpha\gamma I + \alpha\delta J + \beta\gamma J + \beta\delta J^2 \end{aligned}$$

و لدينا :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$\begin{aligned} M(a,b) \times M(c,d) &= (\alpha\gamma - \beta\delta)I + (\alpha\delta + \beta\gamma)J \\ &= M(\alpha\gamma - \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma) \in E \end{aligned}$$

إذن :  $E$  جزء مستقر من  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

ليكن  $(a + ib)$  و  $(c + id)$  عددين عقديين غير منعومين.

لدينا :

$$\begin{aligned} f((a + ib) \times (c + id)) &= f((ac - bd) + i(ad + bc)) \\ &= M((ac - bd), (ad + bc)) \\ &= M(a,b) \times M(c,d) \\ &= f(a + ib) \times f(c + id) \end{aligned}$$



إذن :  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو  $(E^*, \times)$ .

لتكن  $M(a,b)$  مصفوفة من  $E^*$ .

لنحل المعادلة :  $f(x + iy) = M(a,b)$

$$\Leftrightarrow M(x,y) = M(a,b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & \sqrt{3}y \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

إذن المعادلة  $f(x + iy) = M(a,b)$  تقبل حلا وحيدا في  $\mathbb{C}^*$

إذن :  $f$  تقابل من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو  $(E^*, \times)$ .

خلاصة :  $f$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو  $(E^*, \times)$ .

نعلم أن  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي

إذن :  $(E, +)$  زمرة تبادلية (1)

و لدينا كذلك  $(\mathbb{C}^*, \times)$  زمرة تبادلية.

إذن :  $(E^*, \times)$  زمرة تبادلية لأن  $f$  تشاكل تقابلي (2).

بما أن الضرب  $\times$  توزيعي بالنسبة للجمع في  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و بما أن  $E$  جزء مستقر من  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

فإن  $\times$  توزيعي بالنسبة للجمع في  $E$  (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن :  $(E, +, \times)$  جسم تبادلي.



2) ب

لدينا  $E$  هي منتصف القطعة  $[BC]$ .

$$z_E = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{i\bar{a} + ai + 1}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} &= \frac{i(1-a) - (\bar{a} + ia + a)}{\frac{i\bar{a} + ai + 1}{2} - a} \quad \text{و لدينا :} \\ &= 2 \left( \frac{i - 2ai - \bar{a} - a}{i\bar{a} + ai + 1 - 2a} \right) \\ &= 2i \left( \frac{1 - 2a + \bar{a}i + ai}{i\bar{a} + ai + 1 - 2a} \right) \\ &= 2i \end{aligned}$$

$$(\#) \quad \frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} = 2i \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \arg \left( \frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} \right) &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \Leftrightarrow \overline{(AE, B'C')} &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \Leftrightarrow (AE) &\perp (B'C') \end{aligned}$$

$$\left| \frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} \right| = 2 \quad (\#) \quad \text{و لدينا كذلك حسب النتيجة}$$

$$|z_{C'} - z_{B'}| = 2|z_E - z_A| \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow B'C' = 2AE$$

**التمرين الثالث : (3,0 ن)**

1) (I) ■

$$35 \times 11 - 96 \times 4 = 1 \quad \text{لدينا :}$$

إذن : (11,4) حل خاص للمعادلة (E).

2) (I) ■

$$35 \times 11 - 96 \times 4 = 1 \quad \text{لدينا حسب السؤال 1) :}$$

$$35 \wedge 96 = 1 \quad \text{إذن حسب ميرهنه Bezout :}$$

ليكن  $(u, v)$  الحل العام للمعادلة (E).

$$\begin{cases} 35u - 96v = 1 \\ 35 \times 11 - 96 \times 4 = 1 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow 35(u - 11) = 96(v - 4) \quad \otimes$$

1) ب

ننتقل من كون  $A(a)$  و  $B(i\bar{a})$  و  $C(1+ai)$  نقط مستقيمية.

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+ai) - a}{i\bar{a} - a} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{(1+ai) - a}{i\bar{a} - a} \right) = \frac{(1+ai) - a}{i\bar{a} - a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \bar{a}i) - \bar{a}}{-ia - \bar{a}} = \frac{(1+ai) - a}{i\bar{a} - a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \bar{a}i) - \bar{a}}{-ia - \bar{a}} = \frac{(i-a) - ai}{-\bar{a} - ai}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \bar{a}i) - \bar{a} = (i-a) - ai$$

$$\Leftrightarrow i(a - \bar{a}) + (a - \bar{a}) = (i-1)$$

$$\Leftrightarrow (a - \bar{a}) = \frac{(i-1)}{(i+1)}$$

$$\Leftrightarrow (2\Im(a))i = \frac{-2i}{-2} = i$$

$$\Leftrightarrow \Im(a) = \frac{1}{2}$$

2) ا

ننتقل من الكتابة :  $\mathcal{R}_1(B) = B'$

$$\Leftrightarrow (z_{B'} - z_A) = e^{-\frac{\pi}{2}i} (z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow (b' - a) = -i(i\bar{a} - a)$$

$$\Leftrightarrow b' = \bar{a} + ia + a$$

بنفس الطريقة ننتقل من الكتابة :  $\mathcal{R}_2(C) = C'$

$$\Leftrightarrow (z_{C'} - z_A) = e^{\frac{\pi}{2}i} (z_C - z_A)$$

$$\Leftrightarrow (c' - a) = i(1 + ai - a)$$

$$\Leftrightarrow c' = i(1 - a)$$

■ (II) ②

لدينا :  $x \equiv 2^{11}[97]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^{35} &\equiv 2^{11 \times 35}[97] \\ \Rightarrow x^{35} &\equiv 2^{96 \times 4 + 1}[97] \\ \Rightarrow x^{35} &\equiv 2^{96 \times 4} \times 2[97] \quad (*) \end{aligned}$$



و نعلم أن 97 و 2 عددان أوليان :

إذن حسب *Fermat* :  $2^{96} \equiv 1[97]$

يعني :  $2^{96 \times 4} \equiv 1[97]$  أي :  $2^{96 \times 4} \times 2 \equiv 2[97]$

بالرجوع إلى المتوافقة (\*) نحصل على :  $x^{35} \equiv 2[97]$

و بالتالي :  $x$  حل للمعادلة (F) .

■ (II) ③

في الأسئلة السابقة تمكنا من إثبات التكافؤ التالي :

$$x^{35} \equiv 2[97] \Leftrightarrow x \equiv 2^{11}[97]$$

نستعين بالآلة الحاسبة للحصول على :

$$2^{11} = 2048 \quad \text{و منه كذلك} : 2^{11} \equiv 11[97]$$

إذن :  $x \equiv 11[97]$

$$\text{أي} : x = 97k + 11 \quad (\exists k \in \mathbb{Z})$$

و منه : مجموعة حلول المعادلة (F) نكتب على الشكل :

$$S = \{97k + 11 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

التمرين الرابع : (10 ن)

■ (I) ①

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - e^{-x^2} - 2x) = 0 \quad \text{لدينا}$$

يعني أن المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x$  مقارب لـ (ح) بجوار  $+\infty$

■ (I) ②

ليكن  $x$  عنصرا من  $\mathbb{R}_+$

$$\text{لدينا} : f'(x) = 2 + 2xe^{-x^2} > 0$$

إذن  $f$  دالة تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}_+$

$$\text{و لدينا} : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - e^{-x^2}) = +\infty$$

نستنتج إذن جدول تغيرات  $f$  كما يلي :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f$	-1	$+\infty$

إذن :  $35 / 96(v - 4)$

و بما أن :  $35 \wedge 96 = 1$

فإنه حسب *Gauss* :  $35 / (v - 4)$

إذن :  $(\exists k \in \mathbb{Z}) : v = 35k + 4$

نعوض  $v$  بقيمته في المتساوية  $\otimes$  نحصل على :

$$35(u - 11) = 96 \times 35k$$

إذن :  $u = 96k + 11$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) نكتب على الشكل :

$$S = \{(96k + 11 ; 35k + 4) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

■ (II) ①

لدينا 2 و 3 و 5 و 7 هي الأعداد الأولية التي مربعاتها

أصغر من 97 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 97

إذن : 97 عدد أولي .

ليكن :  $x \wedge 97 = d$  إذن :  $d / 97$

و بما أن 97 عدد أولي فإنه يمتلك قاسمين صحيحين طبيعيين

فقط و هما 97 و 1 .

و منه :  $d = 1$  أو  $d = 97$

نفترض أن :  $d = 97$

لدينا  $x \wedge 97 = d$  و منه :  $d / x$

و منه :  $x \equiv 0[97]$  أي :  $x^{35} \equiv 0[97]$

إذن :  $x$  ليس حلاً للمعادلة (F) و هذا يتناقض مع المعطيات الصريحة .

و بالتالي :  $d = 1$  و منه :  $x \wedge 97 = 1$

■ (II) ②

لدينا :  $x \wedge 97 = 1$  و 97 عدد أولي .

إذن حسب مبرهنة (*Fermat*) :  $x^{97-1} \equiv 1[97]$

أي :  $x^{96} \equiv 1[97]$

■ (II) ③

نعلم أن (11,4) حل للمعادلة (E) .

و نعلم كذلك أن :  $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$

لدينا  $x$  حل للمعادلة (F) .

$$(1) \quad x^{35 \times 11} \equiv 2^{11}[97] \quad \text{و منه} : x^{35} \equiv 2[97]$$

و لدينا كذلك حسب نتيجة السؤال ① :  $x^{96} \equiv 1[97]$

$$(2) \quad x^{-96 \times 4} \equiv 1[97] \quad \text{إذن}$$

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفاً بطرف نحصل على :

$$x^{35 \times 11 - 96 \times 4} \equiv 2^{11}[97]$$

و بالتالي :  $x^1 \equiv 2^{11}[97]$

■ (II) 1 (ب)

لدينا :  $0 < c < x$  إذن :  $-x^2 < -c^2 < 0$

ومنه :  $e^{-x^2} < e^{-c^2} < 1$

باستعمال نتيجة السؤال 1 (ج) نحصل على :

$$(\forall x > 0) : \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt < 1$$

ومن أجل  $x = 1$  نحصل على :  $\int_0^1 e^{-t^2} dt < 1$

■ (II) 2 (أ)

لدينا :  $\int_0^\alpha f(t) dt = \int_0^\alpha (2t - e^{-t^2}) dt$

$$= 2 \int_0^\alpha t dt - \int_0^\alpha e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{2\alpha^2}{2} - \int_0^\alpha e^{-t^2} dt$$

$$= \alpha^2 - \int_0^\alpha e^{-t^2} dt$$

$$= g(\alpha)$$

■ (II) 2 (ب)

لدينا :  $t \rightarrow e^{-t^2}$  دالة متصلة على  $\mathbb{R}$  وبالخصوص على  $[0, x]$  بحيث :  $x > 0$

إذن فهي تقبل دالة أصلية  $h$  على المجال  $[0, x]$

بحيث :  $h'(x) = e^{-x^2}$

لدينا  $g$  دالة قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}_+$  لأنها فرق دالتين قابلتين للإشتقاق و هما  $h$  و  $x \rightarrow x^2$  .

ولدينا :  $g(x) = x^2 - h(x)$

$$\Rightarrow g'(x) = 2x - h'(x)$$

$$= 2x - e^{-x^2}$$

$$= f(x)$$



■ (I) 1 (ج)

لدينا :  $f$  تزايدية قطعاً على :  $[0, +\infty[$

إذن :  $f$  تزايدية قطعاً على  $]0, 1[$

ومنه :  $f$  تقابل من المجال  $]0, 1[$  نحو صورته  $]-1, 2 - \frac{1}{e}[$

ولدينا :  $1,6 \approx 2 - \frac{1}{e}$  إذن :  $0 \in ]-1, 2 - \frac{1}{e}[$

وبالتالي :  $0$  يمتلك سابقاً واحداً في المجال  $]0, 1[$  بالتقابل  $f$

يعني :  $\exists! \alpha \in ]0, 1[ : f(\alpha) = 0$

■ (I) 1 (د)

لدينا :  $f(\alpha) = 0$  و  $\alpha \in ]0, 1[$

إذا كان  $0 < x < \alpha$  فإن :  $f(x) < f(\alpha)$  لأن  $f$  تزايدية.

ومنه :  $f(x) < 0$

إذا كان  $\alpha < x < 1$  فإن :  $f(x) > f(\alpha)$  لأن  $f$  تزايدية.

ومنه :  $f(x) > 0$

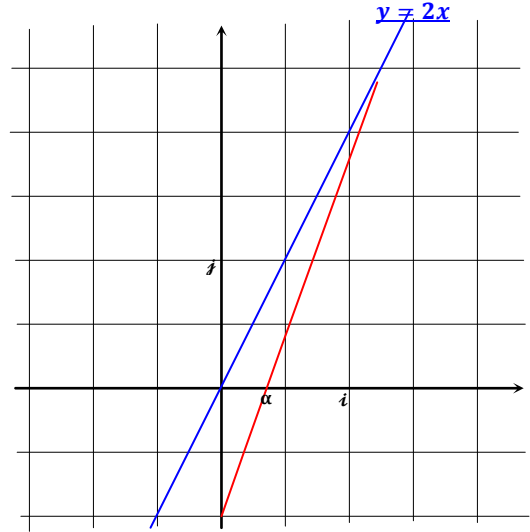
وبالتالي  $f$  موجبة قطعاً على المجال  $]\alpha, 1[$

و  $f$  سالبة قطعاً على المجال  $]0, \alpha[$

و  $f$  تنعدم في  $\alpha$

■ (I) 1 (د)

إنشاء :  $(\mathcal{C})$



■ (II) 1 (أ)

لدينا :  $t \rightarrow e^{-t^2}$  دالة متصلة على  $\mathbb{R}$  وبالخصوص على  $[0, x]$

إذن فهي تقبل دالة أصلية  $h$  على المجال  $[0, x]$  بحيث :  $h'(x) = e^{-x^2}$

ومنه  $h$  متصلة وقابلة للإشتقاق على  $[0, x]$

إذن حسب مبرهنة التزايديات المنتهية :

$$(\exists c \in ]0, x[) : \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(c)$$

$$\Leftrightarrow (\exists c \in ]0, x[) : \frac{1}{x} (h(x) - h(0)) = e^{-c^2}$$

$$\Leftrightarrow (\exists c \in ]0, x[) : \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$$

لدينا  $f$  موجبة على المجال  $]\alpha, 1[$

ومنه :  $(\forall x \in ]\alpha, 1[) : g'(x) = f(x) > 0$

يعني :  $g$  دالة تزايدية قطعاً على  $]\alpha, 1[$ .

ومن  $g$  تقابل من المجال  $]\alpha, 1[$  نحو المجال  $]g(\alpha), g(1)[$ .

ولدينا كذلك  $f$  سالبة على المجال  $[0, \alpha]$

إذن :  $(\forall x \in [0, \alpha]) : g'(x) = f(x) < 0$

يعني :  $g$  دالة تناقصية على المجال  $[0, \alpha]$

وبما أن :  $\alpha > 0$  فإن :  $g(\alpha) < g(0)$

أي :  $(1) \boxed{g(\alpha) < 0}$

ومن السؤال (II) 1 (ب) نستنتج أن :  $1 - \int_1^1 e^{-t^2} dt > 0$

يعني :  $(2) \boxed{g(1) > 0}$

من (1) و (2) نستنتج أن  $0 \in ]g(\alpha), g(1)[$

إذن الصفر يمتلك سابقاً واحداً  $\beta$  في المجال  $]\alpha, 1[$  بالتقابل  $f$ .

أو بتعبير أنيق :  $(\exists ! \beta \in ]\alpha, 1[) ; f(\beta) = 0$

لدينا حسب السؤال (II) 1 (ج)

$(\forall x > 0) (\exists c \in ]0, x[) : \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$

ولدينا كذلك :  $0 < c < x$

إذن :  $e^{-x^2} < e^{-c^2} < 1$

$\Leftrightarrow e^{-x^2} < \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt < 1 ; x > 0$

$\Leftrightarrow e^{-x^2} < \varphi(x) < 1 ; x > 0$

بما أن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

فإنه بالضرورة :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1 = \varphi(0)$

و بالتالي :  $\varphi$  دالة متصلة على اليمين في الصفر.

لدينا :  $\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x 1 \cdot e^{-t^2} dt ; x > 0$



$$= \frac{1}{x} ([uv] - \int uv')$$

$$= \frac{1}{x} ([te^{-t^2}]_0^x + 2 \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt)$$

$$= e^{-x^2} + \frac{2}{x} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$$

نضع :  $\psi(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$

لدينا :  $\psi'(x) = x^2 e^{-x^2}$

ننطلق من :  $\varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2\psi(x)}{x}$

إذن :  $\varphi'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{2x^3 e^{-x^2} - 2\psi(x)}{x^2}$

$$= -2xe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} - \frac{2}{x^2} \psi(x)$$

$$= -\frac{2}{x^2} \psi(x)$$

$$= -\frac{2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$$



انطلاقاً من تعبير  $\varphi'(x)$  نستنتج أن :  $\varphi'(x) < 0$  :  $(\forall x > 0)$

إذن  $\varphi$  تناقصية على  $\mathbb{R}_*^+$ .

وبالخصوص  $\varphi$  متصلة و تناقصية على المجال  $[0, 1]$

ليكن :  $x \in [0, 1]$  يعني :  $0 \leq x \leq 1$

$$\Rightarrow \varphi(0) \geq \varphi(x) \geq \varphi(1)$$

$$\Rightarrow 1 \geq \varphi(x) \geq \int_0^1 e^{-t^2} dt > 0$$

إذن :  $\varphi(x) \in [0, 1]$

و بالتالي :  $\varphi([0, 1]) \subset [0, 1]$

(I) 4 (II) ■

لدينا :  $-t^2 \leq 0$ 

$$\Leftrightarrow e^{-t^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow t^2 e^{-t^2} \leq t^2$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \int_0^x t^2 dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3}$$

(II) 4 (III) ■

$$0 \leq \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3} \quad \text{لدينا :}$$

$$0 \leq \left| \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \right| \leq \left| \frac{x^3}{3} \right| \quad \text{إذن :}$$

$$\left| \frac{2}{x^2} \right| \times \left| \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \right| \leq \left| \frac{x^3}{3} \right| \times \left| \frac{2}{x^2} \right| \quad \text{و منه :}$$

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{2}{x^2} \right| \times \left| \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \right| \quad \text{و نعلم أن :}$$

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}|x| \quad \text{إذن :}$$

و بما أن :  $0 < x < 1$  فإن :  $|x| < 1$ 

$$\text{و بالتالي : } (\forall x \in ]0,1[) ; |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$$

(II) 4 (III) ■

ليكن  $x > 0$ ننطلق من الكتابة :  $\varphi(x) = x$ 

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 0$$



(II) 5 (I) ■

نستعمل في هذا السؤال البرهان بالترجع

من أجل  $n = 0$  لدينا :  $0 \leq u_0 \leq 1$ نفترض أن :  $0 \leq u_n \leq 1$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$ .

$$\Leftrightarrow u_n \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow \varphi(u_n) \in [0,1]$$

لأن :  $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$ 

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

و بالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$ 

(II) 5 (III) ■

لدينا حسب نتائج الأسئلة السابقة :

دالة متصلة وقابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}_+^*$ .إذن يمكن تطبيق TAF بالنسبة للدالة  $\varphi$  على أي مجال من  $\mathbb{R}_+^*$ .لدينا :  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$  و  $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ 

إذن حسب مبرهنة التزايد المتناهية :

يوجد عدد حقيقي  $\lambda$  محصور بين  $\beta$  و  $u_n$  بحيث :

$$\frac{\varphi(u_n) - \varphi(\beta)}{u_n - \beta} = \varphi'(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow |\varphi(u_n) - \varphi(\beta)| = |\varphi'(\lambda)| |u_n - \beta|$$

بما أن :  $g(\beta) = 0$  فإنه حسب (II) 4 (III)  $\varphi(\beta) = \beta$ 

$$\text{إذن : } |u_{n+1} - \beta| < |\varphi'(\lambda)| \cdot |u_n - \beta|$$

لدينا حسب السؤال (II) 4 (III) ■

$$(\forall x \in ]0,1[) ; |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$$

و لدينا  $\lambda \in ]0,1[$  لأن  $\beta$  و  $u_n$  عنصرين من  $]0,1[$ 

$$\text{إذن : } |\varphi'(\lambda)| < \frac{2}{3}$$

$$\text{و منه : } |\varphi'(\lambda)| \cdot |u_n - \beta| < \frac{2}{3} |u_n - \beta|$$

$$\text{و بالتالي : } |u_{n+1} - \beta| < \frac{2}{3} |u_n - \beta|$$



من أجل  $(n - 1)$  نحصل على :

$$\begin{aligned} |u_n - \beta| &\leq \frac{2}{3} |u_{n-1} - \beta| \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} |u_{n-2} - \beta| \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} |u_{n-3} - \beta| \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} |u_{n-4} - \beta| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \beta| \end{aligned}$$

و بما أن :  $0 < \beta < 1$

$$\frac{-1}{3} < \frac{2}{3} - \beta < \frac{2}{3} \quad \text{فإن :}$$

$$-1 < \frac{2}{3} - \beta < 1 \quad \text{إذن :}$$

$$|u_0 - \beta| < 1 \quad \text{أي :}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \beta| < \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{و منه :}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (II) 5 (ع)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{بما أن :}$$

و  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$  متتالية هندسية تؤول إلى الصفر لأن أساسها عدد موجب أصغر من 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \beta) = 0 \quad \text{إذن بالضرورة نستنتج أن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \beta \quad \text{يعني :}$$

و بالتالي :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة و تؤول إلى  $\beta$ .

■ و الحمد لله رب العالمين ■