



9	المعامل:	الرياضيات	المادة:
4س	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة):

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول: (3,5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر التطبيق r الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_1(z_1)$ حيث: $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

و التطبيق h الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_2(z_2)$ حيث: $z_2 = -2z + 3i$ ونضع $F = h \circ r$

(1) حدد طبيعة كل من التطبيقين r و h وعناصرهما المميزة.

(2) نعتبر النقطتين $\Omega(i)$ و $A(a)$ حيث a عدد عقدي معلوم مخالف للعدد i .

ونضع: $D = F(C)$ و $C = F(B)$ و $B = F(A)$

(أ) بين أنه إذا كانت النقطة $M'(z')$ هي صورة النقطة $M(z)$ بالتطبيق F فإن:

$$z' - i = 2e^{\frac{4\pi}{3}}(z - i)$$

(ب) تحقق أن Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق: $F(\Omega) = \Omega$

(3) (أ) حدد بدلالة العدد العقدي a الأعداد العقدية b و c و d الحاق النقط B و C و D على التوالي.

(ب) بين أن النقط Ω و A و D مستقيمة.

(ج) بين أن Ω هو مرجح النظمة المتزنة $\{(B, 4); (C, 2); (D, 1)\}$

(د) حدد مجموعة النقط $A(a)$ لكي تكون النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي.

التمرين الثاني: (4 نقط)

نزود المجموعة \mathbb{R} بقانون التركيب الداخلي * المعرف بما يلي:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) ; x * y = x + y - 3xy$$

(1) (أ) تحقق أن: $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) ; (1 - 3x)(1 - 3y) = 1 - 3(x * y)$

ب) بين أن $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}, *\right)$ زمرة تبادلية.

0,75ن

2) أ) بين أن التطبيق φ الذي يربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي

0,5ن

$$\varphi(x) = 1 - 3x \quad \text{تشاكل تقابلي من } \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}, *\right) \text{ نحو } (\mathbb{R}^*, \times)$$

ب) بين أن : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+) = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$

0,25ن

ج) بين أن $\left(\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[, *\right)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}, *\right)$

0,5ن

3) لكل x من المجموعة $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ ولكل n من \mathbb{N} نضع : $x^{(0)} = 0$

$$\text{و } (\forall n \in \mathbb{N}) ; x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$$

أ) بين أن : $\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; \left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}\right)$

0,25ن

ب) استنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n .

0,5ن

4) نزود المجموعة \mathbb{R} بقانون التركيب الداخلي T المعروف بما يلي :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) ; xTy = x + y - \frac{1}{3}$$

أ) بين أن (\mathbb{R}, T) زمرة تبادلية.

0,5ن

ب) بين أن $(\mathbb{R}, T, *)$ جسم تبادلي.

0,5ن

التمرين الثالث: (5,2نقط)

يحتوي صندوق على أربع كرات: كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء غير قابلة للتمييز باللمس .
نسحب عشوائيا كرة من الصندوق , نسجل لونها , ثم نعيدها إلى الصندوق.
نجري نفس التجربة لمرات متتابة إلى أن نحصل لأول مرة على كرتين متتابعتين من نفس اللون
و نوقف التجربة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة.

1) احسب احتمال كل حدث من الحدثين التاليين : $[X = 2]$ و $[X = 3]$

ان

(2) ليكن k عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

أ) بين أن احتمال الحدث $[X = 2k]$ هو $P_{2k} = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16} \right)^{k-1}$ 0,75 ن

ب) بين أن احتمال الحدث $[X = 2k + 1]$ هو $P_{2k+1} = \left(\frac{3}{16} \right)^k$ 0,75 ن

التمرين الرابع: (10 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I =]-\frac{1}{2}, +\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} ; & x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) بين أن الدالة f متصلة في الصفر. 0,5 ن

(2) لكل عدد حقيقي غير منعدم a من المجال I نعتبر الدالة العددية h_a للمتغير الحقيقي x المعرفة على

المجال I بما يلي: $h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$

أ) احسب $h_a(a)$ و $h_a(0)$ ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي b محصور بين 0 و a بحيث:

$$\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b} \quad 0,5 ن$$

ب) استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر و أن: $f'(0) = -2$. 0,75 ن

(3) أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $I \setminus \{0\}$ 0,5 ن

و أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$; حيث $(\forall x \in I \setminus \{0\})$ $g(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

ب) بين أن: $g(x) < 0$; $(\forall x \in I \setminus \{0\})$ 0,5 ن

ج) استنتج تغيرات الدالة f على المجال I. 0,25 ن

(4) أ) احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليهما. 0,5 ن

ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1, 2]$ بحيث $f(\alpha) = 1$ 0,5

ج) أنشئ المنحنى (C) (نأخذ : $\alpha \approx 1,3$) 0,5

II - 1) نضع : $J = [1, \alpha]$ و $\varphi(x) = \ln(1 + 2x)$ ($\forall x \in I$) .

أ) بين الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال I وأن : $0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$ ($\forall x \geq 1$) 0,5

ب) تحقق أن : $\varphi(\alpha) = \alpha$ وأن : $\varphi(J) \subset J$ 0,75

2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$ ($\forall n \geq 0$) ;

أ) بين أن : $u_n \in J$ ($\forall n \geq 0$) 0,5

ب) بين أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ($\forall n \geq 0$) 0,5

ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها. 0,5

III- نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال I بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I ثم أحسب $F'(x)$ 0,5

ب) استنتج منحي تغيرات الدالة F على المجال I . 0,25

2) أ) بين أن : $F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t} dt$ ($\forall x \geq 1$) 0,5

ب) استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ 0,5

3) نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ على اليمين في $-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \tilde{F}(x) = F(x) ; x \in I \\ \tilde{F}\left(-\frac{1}{2}\right) = \ell \end{cases}$$

ونعتبر الدالة \tilde{F} المعرفة على المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ بما يلي :

أ) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $F(x) - \ell \geq f(x) \left(x + \frac{1}{2}\right)$ ($\forall x \in I$) ; 0,5

ب) استنتج أن الدالة \tilde{F} غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $-\frac{1}{2}$ 0,5

$$\Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i \quad (1)$$

ولدينا كذلك : $h(z_1) = z'$

$$\Leftrightarrow (z' - i) = -2(z_1 - i)$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (z' - i) = -2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i)$$

$$-e^{i\frac{\pi}{3}} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{و لدينا :}$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$(z' - i) = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - i) \quad \text{إذن :}$$

2 ■ (ب)

لدينا حسب السؤال (أ)

$$M \xrightarrow{F} M'$$

$$z \xrightarrow{\quad} z' = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - i) + i$$

نحل المعادلة : $F(M) = M$

$$\Leftrightarrow z \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1 \right) = 2ie^{i\frac{4\pi}{3}} - i$$

$$\Leftrightarrow z \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1 \right) = i \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow z = i$$

$$\Leftrightarrow M \equiv \Omega$$

و بالتالي : Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق $F(M) = M$

3 ■ (أ)

لدينا : $F(A) = B$

$$\Leftrightarrow z_B - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z_A - i)$$

$$\Leftrightarrow z_B = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(a - i) + i$$

$$\Leftrightarrow z_B = 2 \left(\frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (a - i) + i$$

$$\Leftrightarrow z_B = (1 + i\sqrt{3})(i - a) + i$$

$$\Leftrightarrow z_B = i - a - \sqrt{3} - a\sqrt{3}i + i$$

$$\Leftrightarrow z_B = -(a + \sqrt{3}) + i(2 - a\sqrt{3})$$



نطلق من الكتابة : $r(M) = M_1$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i - \frac{1}{2}i \right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + i - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}z - e^{i\frac{5\pi}{6}} \right) + e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}z - e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} \right) + e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - e^{i\frac{\pi}{2}})$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{VM_1} = e^{i\frac{\pi}{3}} \overrightarrow{VM}$$

و بالتالي : r دوران مركزه $V(i)$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

ولدينا كذلك : $h(M) = M_2$

$$\Leftrightarrow z_2 = -2z + 3i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = -2z + 2i + i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = -2(z - i) + i$$

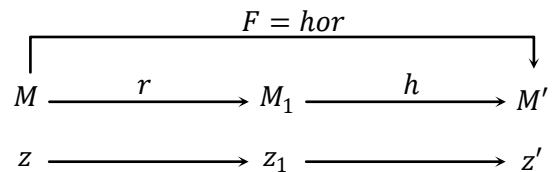
$$\Leftrightarrow (z_2 - i) = -2(z - i)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{VM_2} = -2 \overrightarrow{VM}$$

و بالتالي h تحاكي مركزه $V(i)$ و نسبته -2

2 ■ (أ)

نطلق من الشكل التالي :



لدينا : $r(M) = M_1$

$$\Leftrightarrow (z_1 - i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i)$$

■ 1 ب

لنبين أن * قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3} \text{ و } y \neq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow (1 - 3x) \neq 0 \text{ و } (1 - 3y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - 3x)(1 - 3y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3(x * y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x * y) \neq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x * y) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

إذن * قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

التجميعية: ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

لدينا: $x * (y * z) = x * (y + z - 3yz)$

$$= x + (y + z - 3yz) - 3x(y + z - 3yz)$$

$$= x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz$$

و لدينا: $(x * y) * z = (x + y - 3xy) * z$

$$= (x + y - 3xy) + z - 3z(x + y - 3xy)$$

$$= x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz$$

و بالتالي: * قانون تجميعي في $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

التبادلية: لدينا: $x * y = x + y - 3xy$

$$= y + x - 3yx$$

$$= y * x$$

إذن تبادلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

العنصر المحايد: ليكن e العنصر المحايد في $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; x * e = e * x = x$$

$$\Leftrightarrow x + e - 3xe = x$$

$$\Leftrightarrow e(1 - 3x) = 0$$

بما أن $x \neq \frac{1}{3}$ فإن $(1 - 3x) \neq 0$

إذن: $e = 0$

مع: $0 \neq \frac{1}{3}$ لأن $e \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

و بنفس الطريقة ننتقل من الكتابتين $F(C) = D$ و $F(B) = C$ لنحصل على:

$$z_C = 2(\sqrt{3} - a) + i(2a\sqrt{3} + 3)$$

$$\text{و } z_D = 8a - 7i$$

■ 3 ب

$$\text{لدينا: } \frac{z_\Omega - z_A}{z_D - z_A} = \frac{i - a}{8a - 7i - a} = \frac{-1}{7} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (z_\Omega - z_A) = \frac{-1}{7}(z_D - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = \frac{-1}{7}\overrightarrow{AD}$$



و بالتالي: النقط A و Ω و D نقط مستقيمة.

■ 3 ج

$$\text{لدينا: } \frac{4z_B + 2z_C + z_D}{7} = \frac{7i}{7} = z_\Omega$$

نستنتج إذن أن: النقطة Ω هي مرجح النظمة المترنة:

$$\{(B, 4); (C, 2); (D, 1)\}$$

■ 3 د

ننتقل من كون D نقطة من المحور الحقيقي. و نضع: $a = x + iy$

$$\Leftrightarrow z_D \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (8a - 7i) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 8x + i(8y - 7) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (8y - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{7}{8}$$



إذن مجموعة النقط $A(a)$ التي من أجلها النقطة D تنتمي إلى المحور

الحقيقي تشكل مستقيما موازيا للمحور الحقيقي. و معادلته: $y = \frac{7}{8}$

التمرين الثاني: (4,0 ن)

■ 1 ا

$$1 - 3(x * y) = 1 - 3(x + y - 3xy)$$

$$= 1 - 3x - 3y + 9xy$$

$$= (1 - 3x) - 3y(1 - 3x)$$

$$= (1 - 3x)(1 - 3y)$$

التماثل:

ليكن x' مماثل x بالنسبة لـ *

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x * x' &= x' * x = e \\ \Leftrightarrow x + x' - 3xx' &= 0 \\ \Leftrightarrow x'(1 - 3x) &= -x \\ \Leftrightarrow x' &= \frac{-x}{(1 - 3x)} \end{aligned}$$



ولدينا : $1 \neq 0 \Rightarrow 1 - 3x \neq -3x$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{1 - 3x} &\neq \frac{-1}{3x} \\ \Leftrightarrow \frac{-x}{1 - 3x} &\neq \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{-x}{1 - 3x} &\in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} \end{aligned}$$

ومنه : كل عنصر x من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ يقبل مماثلا $\left(\frac{-x}{1-3x} \right)$ في $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ بالنسبة للقانون * .

خلاصة:

$(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; *)$ زمرة تبادلية .

2) i)

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; *) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{R}^*; \times) \\ x & \xrightarrow{\quad} & 1 - 3x \end{array}$$

لدينا :

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

لدينا : $\varphi(x * y) = 1 - 3(x * y)$

ومنه حسب السؤال (1) i)

$$\varphi(x * y) = (1 - 3x)(1 - 3y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إن φ تشاكل من $(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; *)$ نحو $(\mathbb{R}^*; \times)$

ليكن y عنصرا من \mathbb{R}^*

المعادلة $\varphi(x) = y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا و هو : $x = \frac{1-y}{3}$

إن φ تقابل من $(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; *)$ نحو $(\mathbb{R}^*; \times)$

و تقابله العكسي φ^{-1} معرف بما يلي :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^*; \times) & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & (\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; *) \\ y & \xrightarrow{\quad} & \frac{1-y}{3} \end{array}$$

2) ب)

لدينا : $\varphi'(x) = -3 < 0$

إن دالة تناقصية على \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) &= \varphi^{-1}(]0; +\infty[) \quad \text{ومنه :} \\ &= \left] \lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(y) ; \varphi^{-1}(0) \right[\\ &= \left] \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{3} \right) ; \frac{1}{3} \right[\\ &= \left] -\infty ; \frac{1}{3} \right[\end{aligned}$$

2) ج)

لدينا : $\left] -\infty ; \frac{1}{3} \right[$ جزء غير فارغ من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

يعني : $\left] -\infty ; \frac{1}{3} \right[\subset \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

ليكن x و y عنصرين من $\left] -\infty ; \frac{1}{3} \right[$

$$\begin{aligned} x * y' &= x * \left(\frac{-y}{1-3y} \right) \quad \text{لدينا :} \\ &= x - \frac{y}{1-3y} + \frac{3xy}{1-3y} \\ &= \frac{x(1-3y) - y + 3xy}{1-3y} \\ &= \frac{x-y}{1-3y} \end{aligned}$$



ولدينا x و y عنصرين من $\left] -\infty ; \frac{1}{3} \right[$

إن : $x < \frac{1}{3}$ و $y < \frac{1}{3}$

ومنه : $3x < 1$ و $3y < 1$

إن : $(1 - 3y) > 0$ و $3x - 3y < 1 - 3y$

(2)

(1)

نضرب طرفي المتفاوتة (1) في العدد الموجب $\left(\frac{1}{1-3y} \right)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{3x - 3y}{1 - 3y} &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x - y}{1 - 3y} &< \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{x - y}{1 - 3y} &\in \left] -\infty ; \frac{1}{3} \right[\\ \Leftrightarrow x * y' &\in \left] -\infty ; \frac{1}{3} \right[\end{aligned}$$

و بالتالي : $\left] -\infty ; \frac{1}{3} \right[; *)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; *)$

نستنتج إذن أن : $x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z)$

إذن القانون * توزيعي على القانون \top (1)

و لدينا : (\mathbb{R}, \top) و $(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}; *)$ زمرتان تبادليتان. (2)

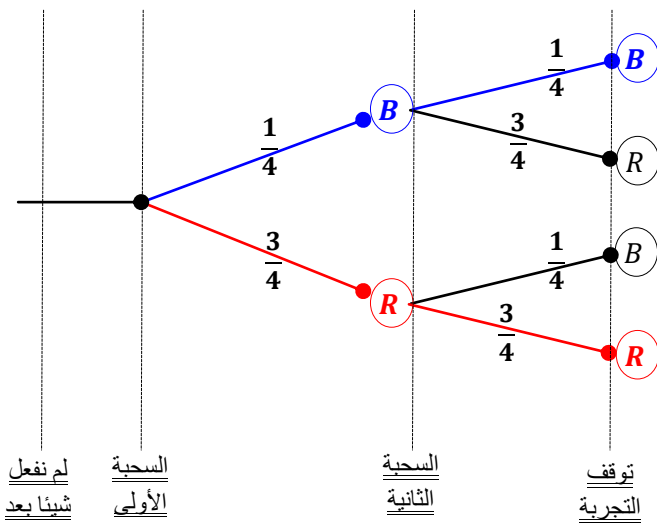
إذن من (1) و (2) نستنتج أن $(\mathbb{R}, \top, *)$ جسم تبادلي .

التمرين الثالث : (2,5 ن)

1 ■

$p[X = 2]$ هو احتمال توقف التجربة في السحبة رقم 2 .

نستعمل نموذج الشجرة التالي :



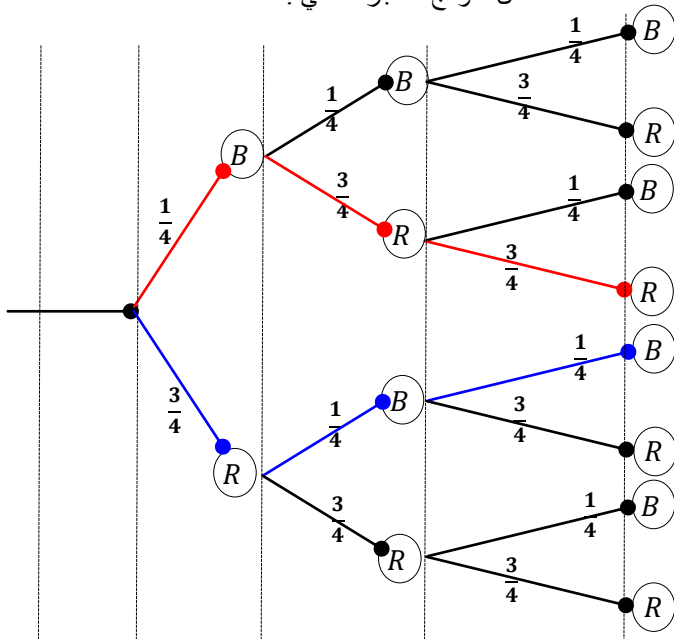
توقف التجربة
السحبة الثانية
السحبة الأولى
لم نفعل شيئاً بعد

و منه احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون يساوي :

$$p[X = 2] = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8}$$

$p[X = 3]$ هو احتمال توقف التجربة في السحبة رقم 3 .

نستعمل نموذج الشجرة التالي :



3 ■

ليكن x عنصراً من $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ و n عدداً صحيحاً طبيعياً .

لدينا : $\varphi(x^{(n)}) = \varphi\left(\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ مرة}}\right)$

$$\Leftrightarrow \varphi(x^{(n)}) = \varphi(x) \times \varphi(x) \times \dots \times \varphi(x)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$$

3 ■

ننتقل من الكتابة : $\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$

$$\Leftrightarrow 1 - 3x^{(n)} = (1 - 3x)^n$$

$$\Leftrightarrow x^{(n)} = \frac{1 - (1 - 3x)^n}{3}$$

4 ■

لدينا \top قانون تركيب داخلي في \mathbb{R}

لأن : $\forall x, y \in \mathbb{R} ; x + y - \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$

• \top تبادلي في \mathbb{R} لأن \mathbb{R} تبادلي في \mathbb{R} .

و لدينا : $x \top (y \top z) = x \top \left(x + y - \frac{1}{3}\right)$

$$= x + x + y - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= (x \top y) \top z$$

• إذن \top قانون تجميعي في \mathbb{R}

ليكن e العنصر المحايد لـ \top في \mathbb{R} . $x \top e = e \top x = x$

$$\Leftrightarrow x + e - \frac{1}{3} = x$$

$$\Leftrightarrow e = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

ليكن x عنصراً من \mathbb{R} و x' مماثله بالنسبة لـ \top

$$\Leftrightarrow x \top x' = x' \top x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x + x' - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x' = \left(\frac{2}{3} - x\right) \in \mathbb{R}$$

• و بالتالي : زمرة تبادلية (\mathbb{R}, \top) .

4 ■

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من \mathbb{R}

لدينا : $x * (y \top z) = x * \left(y + z - \frac{1}{3}\right)$

$$= 2x + y + z - 3(xy + xz) - \frac{1}{3}$$

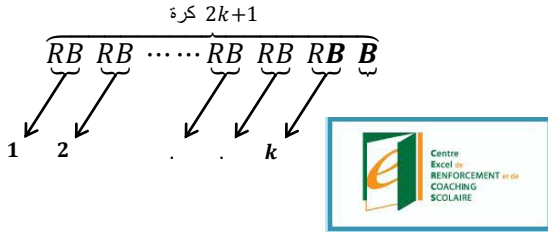
و لدينا : $(x * y) \top (x * z) = (x + y - 3xy) \top (x + z - 3xz)$

$$= 2x + y + z - 3(xy + xz) - \frac{1}{3}$$

2) ب

بنفس الطريقة نفصل بين حالتين :

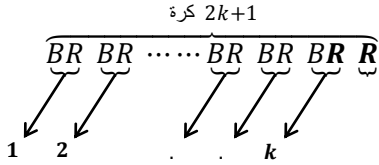
الحالة الأولى: توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :



و هذا يعني : أننا نحصل على k كرة حمراء و $(k + 1)$ كرة بيضاء.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^k : \text{ إذن احتمال هذه الحالة هو :}$$

الحالة الثانية: توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :



و هذا يعني : أننا نحصل على $(k + 1)$ كرة حمراء و k كرة بيضاء.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} : \text{ إذن احتمال هذه الحالة هو :}$$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في

السحبين $2k$ و $(2k + 1)$ هو :

$$p[X = 2k + 1] = \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow p[X = 2k + 1] = \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)$$

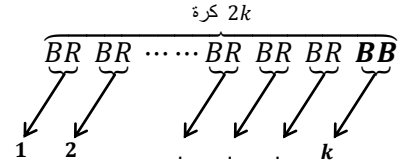
$$\Leftrightarrow p[X = 2k + 1] = \left(\frac{3}{16}\right)^k$$

$$p[X = 3] = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} : \text{ إذن}$$

2) ا

$p[X = 2k]$ هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبين $(2k - 1)$ و $2k$ و هنا نفصل بين حالتين و ذلك حسب لون الكرتين

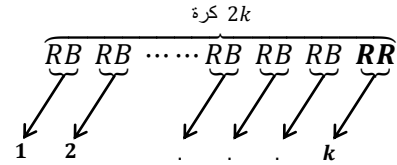
الحالة الأولى: توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :



و هذا يعني : أننا نحصل على $(k + 1)$ كرة بيضاء و $(k - 1)$ كرة حمراء.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} : \text{ إذن احتمال هذه الحالة هو :}$$

الحالة الثانية: توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :



و هذا يعني : أننا نحصل على $(k + 1)$ كرة حمراء و $(k - 1)$ كرة بيضاء.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} : \text{ إذن احتمال هذه الحالة هو :}$$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في

السحبين $(2k - 1)$ و $(2k)$ هو :

$$p[X = 2k] = \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow p[X = 2k] = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow p[X = 2k] = \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{8}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2x)}{x} \right) = \lim_{\substack{u \rightarrow 1 \\ u=1+2x}} \left(\frac{2 \ln u}{u-1} \right)$$

$$= 2 \lim_{u \rightarrow 1} \left(\frac{\ln u - \ln 1}{u-1} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1} \right) = 2 = f(0)$$



لأنه لدينا : $(\forall x_0 > 0) ; \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} \right) = \frac{1}{x_0}$

إذن f دالة متصلة في الصفر.

$$h_a(a) = (\ln(1+2a) - 2a)a^2 - (\ln(1+2a) - 2a)a^2 = 0$$

$$h_a(0) = -(\ln(1))a^2 = 0$$

و بما أن h_a دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $[0, a]$.

$$h_a(0) = h_a(a) \text{ و}$$

فإنه حسب مبرهنة رول يوجد عنصر b من $]0, a[$ بحيث : $h'_a(b) = 0$

$$\Leftrightarrow 2(\ln(1+2a) - 2a)b = a^2 \left(-2 + \frac{2}{1+2b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} \right)$

$$= \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a=x}} \left(\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} \right)$$

لدينا حسب السؤال (1) يوجد b مرتبط بـ a بحيث : $a < b < 0$

$$\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b} \text{ و}$$

إذا كان a يؤول إلى الصفر فإن b يؤول كذلك إلى الصفر

$$a < b < 0 \text{ و ذلك بسبب التأخير}$$

و بالتالي النهاية تصبح :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} \right) = \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{-2}{1+2b} \right) = -2 \in \mathbb{R}$$

إذن f دالة قابلة للإشتقاق في الصفر و $f'(0) = -2$

لدينا f دالة قابلة للإشتقاق على $I \setminus \{0\}$ لأنها مجموع دوال اعتيادية قابلة للإشتقاق على $I \setminus \{0\}$.

و لدينا : $f'(x) = \left(\frac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x) \right) / x^2$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)} \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$$

لدينا g دالة معرفة و متصلة و قابلة للإشتقاق على I .

و لدينا كذلك $g'(x) = 2 - \left(2 \ln(1+2x) + \frac{2(1+2x)}{(1+2x)} \right) = -2 \ln(1+2x)$

إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) = 0$
 إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) < 0$
 إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) > 0$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}^+} 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

$$= -1 - \lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}^+} (1+2x)\ln(1+2x)$$

$$= -1 - \lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ u=1+2x}} u \ln(u)$$

$$= -1 - 0$$

$$= -1$$



و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \left(\frac{1}{x} + 2 \right) \ln(1+2x) \right)$$

$$= (+\infty)(-\infty)$$

$$= -\infty$$

نستنتج جدول تغيرات الدالة g كما يلي .

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	
g	-1	0	$-\infty$

نلاحظ حسب هذا الجدول أن الدالة g متصلة على I و تقبل 0 كقيمة قصوية

إذن : $(\forall x \in I) ; g(x) \leq 0$

و بالتالي : $\forall x \in I \setminus \{0\} ; g(x) < 0$

■ (I) 3 ج

لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة بإشارتي $g(x)$ و $(1+2x)$

و هو ما نلخصه في الجدول التالي :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g(x)$		0	
$(1+2x)$	0	1	
$f'(x)$			
f	$+\infty$	2	0

■ (I) 4 ج

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ u=2x+1}} \left(\frac{2 \ln u}{u-1} \right) = \frac{2(-\infty)}{(-1)} = +\infty$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{-1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى (ع)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u=2x+1}} \left(\frac{2 \ln u}{u-1} \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{\ln u}{u} \right) \left(\frac{u}{u-1} \right) = 0$$

إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى (ع) بجوار $+\infty$.

■ (I) 4 ب

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

إذن f متصلة و تناقصية قطعا على $[1; 2]$ لأن : $]-\frac{1}{2}; +\infty[\subset [1; 2]$

و منه f تقابل من $[1; 2]$ نحو صورته $[f(2); f(1)]$

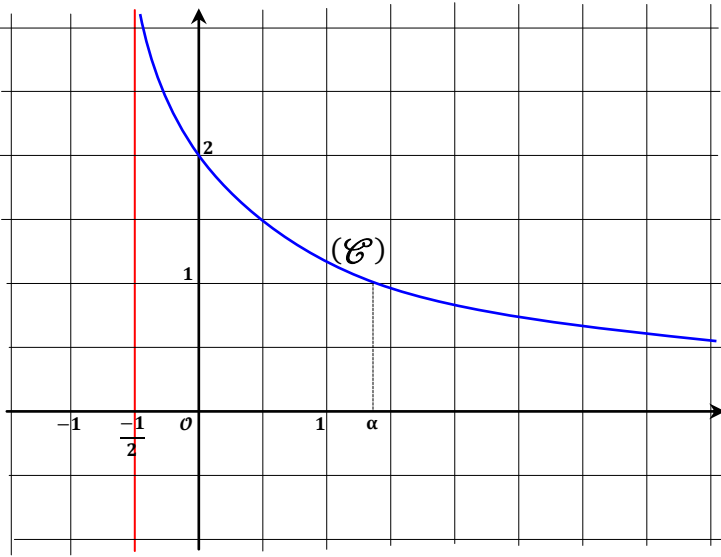
يعني f تقابل من $[1; 2]$ نحو $[0,8 ; 1,1]$

و بما أن العدد 1 ينتمي إلى المجال $[0,8 ; 1,1]$

فإنه يمتلك سابقا واحدا بالتقابل f من المجال $[1; 2]$

أو بتعبير رياضي جميل : $\exists! \alpha \in [1; 2] : f(\alpha) = 1$

■ (I) 4 ج



■ (II) 1 ج

الدالة φ عبارة عن مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على I

إذن φ قابلة للإشتقاق على I .

$$\text{و لدينا : } \varphi'(x) = \frac{2}{1+2x}$$

لدينا من أجل : $x \geq 1 : 6 \leq 2 + 4x$

$$\Leftrightarrow 6 \leq 2(1+2x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+2x} \leq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) \leq \frac{2}{3} \quad (1)$$

و لدينا كذلك : $x \in I$: إذن : $x > \frac{-1}{2}$

و منه : $1+2x > 0$: إذن : $\frac{2}{1+2x} > 0$

يعني : $\varphi'(x) > 0$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$$

و بما أن : $(u_n \in J : \text{لأن } u_n \geq 1)$

فإن : $c > u_n \geq 1$ يعني : $c \geq 1$

و منه : $0 < \varphi'(c) \leq \frac{2}{3}$

يعني : $|\varphi'(c)| \leq \frac{2}{3}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|u_n - \alpha|$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow |\varphi'(c)||u_n - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$$

$$\Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$$

و من أجل $(n-1)$ نجد :

$$\Leftrightarrow |u_n - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_{n-1} - \alpha|$$

$$\leq \frac{2}{3} \frac{2}{3} |u_{n-2} - \alpha|$$

$$\leq \frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3} |u_{n-3} - \alpha|$$

⋮ ⋮ ⋮

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$(3) \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \quad \text{إذن :}$$

من جهة أخرى لدينا : $\alpha > 0$ يعني : $-\alpha < 0$

أي : $1 - \alpha < 1$ و منه : $|1 - \alpha| < 1$

أي : $|u_0 - \alpha| < 1$

$$(4) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{و منه :}$$

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ب) 2 (II) ■

بما أن : $(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \text{و}$$

(لأنها متتالية هندسية أساسها موجب و أصغر من 1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \alpha| = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha \quad \text{أي :}$$

ب) 1 (II) ■

لدينا حسب نتيجة السؤال 4 (I) : $f(\alpha) = 1$



$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha} = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+2\alpha) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \alpha$$

و لدينا : $\varphi'(x) = \frac{2}{1+2x} > 0$ إذن φ دالة تزايدية قطعاً على I

و منه : $\varphi([1; \alpha]) = [\varphi(1); \varphi(\alpha)] = [\ln 3; \alpha]$

و لدينا : $[\ln 3; \alpha] \approx [1,1; \alpha] \subset [1; \alpha]$

$$\varphi(J) \subset J \quad \text{إذن :}$$

ب) 2 (II) ■

باستعمال البرهان بالترجع

لدينا : من أجل $n = 0$: $u_0 = 1 \in [1; \alpha] = J$

نفترض أنه : $(\forall n \geq 0) ; u_n \in J$

إذن : $\varphi(u_n) \in \varphi(J)$

و بما أن : $\varphi(J) \subset J$ فإن : $\varphi(u_n) \in J$

يعني : $\ln(1+2u_n) \in J$ و منه : $u_{n+1} \in J$

و بالتالي : $(\forall n \geq 0) ; u_n \in J$

ب) 2 (II) ■

لدينا الدالة φ قابلة للإستقاق على المجال I

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على أي مجال يوجد ضمن I

نختار المجال الذي طرفاه u_n و α .

إذن : يوجد c محصور بين u_n و α بحيث : $\frac{\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)}{u_n - \alpha} = \varphi'(c)$

$$\Rightarrow \left| \frac{\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| = |\varphi'(c)|$$

$$\Rightarrow |\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| = |\varphi'(c)||u_n - \alpha|$$

لدينا حسب السؤال : 1 (II) ■

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$$

■ (III) 2 ب

$$[(\ln(1+2t))^2]' = \frac{4 \ln(1+2t)}{(1+2t)} \quad \text{لاحظ أن :}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)} \right) dt = \frac{1}{4} [(\ln(1+2t))^2]_1^x$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)} \right) dt = \frac{1}{4} ((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} ((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2) \right) = +\infty \quad \text{وبما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \quad \text{فإنه بالضرورة لدينا :}$$

و ذلك بسبب المتفاوتة التالية :

$$(\forall x \geq 1) ; F(x) \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1} \right) dt$$

■ (III) 3 ا

نعتبر المجال $\left[\frac{-1}{2}; x \right]$ بحيث $x \in I$

لدينا \tilde{F} دالة معرفة و متصلة على المجال $\left[\frac{-1}{2}; x \right]$

لأن F متصلة على I و F متصلة على اليمين في $\frac{-1}{2}$ حسب الافتراض

و لدينا كذلك \tilde{F} قابلة للإشتقاق على $\left[\frac{-1}{2}; x \right]$ لأن F قابلة للإشتقاق على I

إذن حسب مبرهنة التزايد المتناهية :

$$\Leftrightarrow \exists c \in \left] \frac{-1}{2}; x \right[; \frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right)}{x - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \tilde{F}'(c)$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \left] \frac{-1}{2}; x \right[; \frac{F(x) - \ell}{x + \frac{1}{2}} = f(c)$$

$$\exists c \in \left] \frac{-1}{2}; x \right[; (F(x) - \ell) = f(c) \left(x + \frac{1}{2} \right) \quad (\#)$$

و لدينا من جهة أخرى : $c \in \left] \frac{-1}{2}; x \right[$ يعني $x > c$

و منه : $f(x) < f(c)$ لأن f تناقصية .

إذن : $(x + \frac{1}{2})f(x) < (x + \frac{1}{2})f(c)$

و منه باستعمال النتيجة (#) نحصل على :

$$(F(x) - \ell) \geq f(x) \left(x + \frac{1}{2} \right) \quad (*)$$

■ (III) 3 ب

$$\left(\frac{F(x) - \ell}{x + \frac{1}{2}} \right) \geq f(x) \quad \text{المتفاوتة (*) تصبح :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}} f(x) = +\infty \quad \text{و نعلم أن :}$$

و بالتالي F غير قابلة للإشتقاق على اليمين في $\frac{-1}{2}$

■ (III) 1 ا

لدينا حسب الأسئلة السابقة : f دالة متصلة على I .

إذن f متصلة على أي مجال على شكل $[0, x]$ بحيث $x \in I$

و منه f تقبل دالة أصلية F بحيث : $F'(x) = f(x)$

و منه F قابلة للإشتقاق على المجال I .

■ (III) 1 ب

نعلم أن : $f(x) > 0$; $(\forall x \in I)$

إذن : $F'(x) > 0$; $(\forall x \in I)$

و منه F دالة تزايدية قطعاً على I

■ (III) 2 ا

$$(*) \quad (\forall t \geq 1) ; \frac{1}{t} \geq \frac{1}{2t+1} \quad \text{لدينا :}$$

و لدينا : $(\forall t \geq 1) ; 2t+1 \geq 3 > 1$

إذن : $(\forall t \geq 1) ; \ln(2t+1) > 0$

نضرب طرفي المتفاوتة (*) في العدد الموجب $\ln(2t+1)$ نحصل على :

$$\frac{\ln(2t+1)}{t} > \frac{\ln(2t+1)}{2t+1}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{t} \right) dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1} \right) dt$$

$$\Rightarrow \int_1^x f(t) dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1} \right) dt$$

$$\Rightarrow F(x) - \int_1^x f(x) dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1} \right) dt \quad (*)$$

لدينا f متصلة على $[0; 1]$

إذن التكامل : $\int_1^x f(x) dt$ يُعبر عن قياس لمساحة موجبة

أي : $\int_1^x f(x) dt \geq 0$ و منه : $-\int_1^x f(x) dt \leq 0$

$$(**) \quad F(x) - \int_1^x f(x) dt \leq F(x) \quad \text{يعني :}$$

من (*) و (**) نستنتج أن :

$$(\forall x \geq 1) ; F(x) \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1} \right) dt$$