

الصفحة
1
4

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2009
الموضوع

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي
وتكوين الأطر
والبحث العلمي
المركز الوطني لتنظيم الامتحانات



C:RS24

9	المعامل:	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة) أو المسلك:

يسمح استعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول : (3 نقط)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

لتكن V مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

1- بين أن V فضاء متجهي جزئي من $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ وحدد أساسا له . 0,75

2- بين أن V جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ 0,25

ب) بين أن $(V, +, \times)$ حلقة واحدة تبادلية . 0,5

3- احسب $M_{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} \times M_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}$ 0,25

ب) هل الحلقة $(V, +, \times)$ جسم؟ 0,25

4- لتكن X مصفوفة من V حيث $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ مع $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

أ) بين أن : $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I = O$ حيث O هي المصفوفة المنعدمة . 0,5

ب) نفترض أن : $a^2 - 4b^2 \neq 0$ 0,5

بين أن المصفوفة X تقبل مقلوبا في V ينبغي تحديده .

التمرين الثاني : (4 نقط)

ليكن u عددا عقديا يخالف $(1-i)$

1) أ - أنشر $(iu-1-i)^2$ 0,25

ب - حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : 0,75

$$z^2 - 2(u+1-i)z + 2u^2 - 4i = 0$$

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر .

نعتبر النقط $A((1+i)u-2i)$ و $B((1-i)u+2)$ و $U(u)$ و $\Omega(2-2i)$

أ - حدد لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ ثم حدد متجهة الإزاحة t التي تحول النقطة U إلى النقطة I 0,5

ب - ليكن R الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. بين أن $R(A) = B$ 0,5

ج - استنتج أن (ΩI) و (AB) متعامدان.	0,5
د - انطلاقا من النقطة U وضح طريقة لإنشاء النقطتين A و B	0,75
(3) نضع $u = a(1+i) - 2i$ حيث $(a \in \mathbb{R})$	
أ) حدد لحقي المتجهين \overline{AB} و \overline{AU} بدلالة a	0,5
ب) استنتج أن النقط A و B و U مستقيمية.	0,25
التمرين الثالث : (3 نقط)	
n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 4 .	
لدينا ثلاث صناديق U_1 و U_2 و U_3 .	
الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء واحدة و $(n-1)$ كرة سوداء.	
الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و $(n-2)$ كرة سوداء.	
الصندوق U_3 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و $(n-3)$ كرة سوداء.	
نعتبر التجربة العشوائية التالية: نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة ثم نسحب تائيا كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار.	
ليكن X المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.	
1- حدد قيم المتغير العشوائي X	0,25
2- أ) بين أن احتمال الحدث $(X=2)$ يساوي $\frac{8}{3n(n-1)}$	0,75
ب) بين أن احتمال الحدث $(X=1)$ يساوي $\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$	0,75
ج) استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X	0,5
3- علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما هو احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق U_3 ؟	0,75
مسألة: (10 نقط)	
I - نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي : $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$	
1) أ - ادرس تغيرات الدالة g	0,5
ب - ضع جدول تغيرات الدالة g	0,5
2) أ - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[\ln 4, \ln 6]$	0,5
(نأخذ $\ln 2 \approx 0,7$ و $\ln 3 \approx 1,1$)	
ب - ادرس إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}^+	0,5
3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n})$ لكل n من \mathbb{N}	
أ - بين أن $1 \leq u_n < \alpha$ لكل n من \mathbb{N}	0,5
ب - بين أن $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ لكل n من \mathbb{N}	0,25

ج - بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعا . 0,25

د - بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0,5

II - نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي : $f(x) = \frac{1-e^x}{x^2}$
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 1

(2) أ - تحقق أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ 0,5

ب - بين أن $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{x^3}$ لكل x من \mathbb{R}_+^* ثم ضع جدول تغيرات الدالة f 0,75

(3) أنشئ (C) (ناخذ $\alpha \approx 1,5$) 0,5

III - نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$(\forall x > 0) \quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt \quad \text{و} \quad F(0) = -\ln 2$$

(1) أ - باستعمال مكاملة بالأجزاء , بين أن : $(\forall x > 0) \quad F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ 0,5

ب - بين أن لكل x من $]0, +\infty[$: $e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$ 0,5

ج - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر . 0,5

(2) أ - بين أن لكل x من $]0, +\infty[$: $F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$ 0,25

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 0,25

(3) بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وأن : $(\forall x > 0) \quad F'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x-1}{x} \right)^2$ 0,5

(4) أ- ليكن x من المجال $]0, +\infty[$.

بين أنه يوجد c من المجال $]0, x[$ بحيث: $F(x) - F(0) = -\frac{1}{2}xe^{2c}$ (يمكنك استعمال مبرهنة

التزايدات المنتهية مرتين)

ب- أثبت أن لكل x من $]0, +\infty[$: $-\frac{1}{2}e^{2x} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{1}{2}$ 0,25

ج- استنتج أن F قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و أن $F'_d(0) = -\frac{1}{2}$ 0,25

التمرين الأول: (3 نقطه)

تذكير:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ حلقة واحدة وحدتها المصفوفة } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times) \checkmark$$

$$\text{فضاء متجهي حقيقي. } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot) \checkmark$$

$$V = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ نضع}$$

1. (*) لدينا :

$$O = M_{(0,0)} \in V \text{ ، لأن } V \neq \emptyset \checkmark$$

$$V \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \checkmark$$

$$\checkmark \text{ لكل عنصرين } M_{(a,b)} \text{ و } M_{(c,d)} \text{ من } V \text{ ولكل } (\alpha, \beta) \text{ من } \mathbb{R}^2 \text{ ، لدينا :}$$

$$\alpha M_{(a,b)} + \beta M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ 4(\alpha b + \beta d) & \alpha a + \beta c \end{pmatrix} = M_{(\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d)} \in V$$

$$\text{ومنه فإن } V \text{ فضاء متجهي جزئي من } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$$

$$(*) \text{ لكل عنصر } M_{(a,b)} \text{ من } V \text{ ، لدينا : } M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ \text{ ، حيث :}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{(1,0)} \in V \text{ و } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = M_{(0,4)} \in V \text{ ، إذن } (I, J) \text{ أسرة مولدة للفضاء } V$$

$$\text{لكل } (\alpha, \beta) \text{ من } \mathbb{R}^2 \text{ ، لدينا : } \alpha I + \beta J = O \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 4\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$\text{في } V \text{ . وبالتالي فإن } (I, J) \text{ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي } (V, +, \cdot) \text{ . (بعده } \dim V = 2 \text{)}$$

$$2. \text{ أ- ليكن } M_{(a,b)} \text{ و } M_{(c,d)} \text{ عنصران من } V \text{ ، لدينا :}$$

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ 4d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + 4bd & ad + bc \\ 4(ad + bc) & ac + 4bd \end{pmatrix} = M_{(ac+4bd, ad+bc)} \in V$$

$$\text{إذن } V \text{ جزء مستقر من } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$$

2. ب- لدينا :

$$\checkmark (V, +, \cdot) \text{ فضاء متجهي حقيقي. إذن زمرة تبادلية.}$$

$$\checkmark (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times) \text{ حلقة ، إذن } \times \text{ تجميعي وتوزيحي على } + \text{ في } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ و بما أن } V \text{ جزء مستقر من } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times) \text{ ،}$$

$$\text{فإن } \times \text{ تجميعي وتوزيحي على } + \text{ في } V$$

$$\checkmark I \text{ هي وحدة الحلقة } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times) \text{ و } I = M_{(1,0)} \in V \text{ ، إذن } I \text{ هي وحدة } V$$

$$.V \text{ إذن } \times \text{ قانون تبادلي في } V. M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(ac+4bd, ad+bc)} = M_{(ca+4db, da+cb)} = M_{(c,d)} \times M_{(a,b)} \quad \checkmark$$

خلاصة : (V, +, ×) حلقة واحدة تبادلية.

$$.3 \text{ أ- لدينا : } M_{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)} \times M_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)} = M_{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 4 \left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{2}\right)} = M_{(0,0)} = O$$

$$\text{ب- لدينا : } M_{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)} \times M_{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)} = O \text{ و } M_{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)} \neq O \text{ و } M_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)} \neq O$$

قواسم الصفر ، ومنه فإن الحلقة (V, +, ×) ليست جسما.

$$.4 \text{ لتكن } X \text{ مصفوفة من } V \text{ حيث } X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \text{ مع } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} \text{أ- لدينا : } X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I &= M_{(a,b)}^2 - 2aM_{(a,b)} + (a^2 - 4b^2)M_{(1,0)} \\ &= M_{(a^2+4b^2, 2ab)} - M_{(2a^2, 2ab)} + M_{(a^2-4b^2, 0)} \\ &= M_{(0,0)} \\ &= O \end{aligned}$$

$$\text{ب- نفترض أن } a^2 - 4b^2 \neq 0 \text{ إذن : } \frac{1}{a^2 - 4b^2} (2aI - X)X = I$$

$$\cdot \frac{1}{a^2 - 4b^2} (2aI - X) = \frac{1}{a^2 - 4b^2} (2aM_{(1,0)} - M_{(a,b)}) = M_{\left(\frac{a}{a^2-4b^2}, \frac{-b}{a^2-4b^2}\right)} \in V \text{ ولدينا :}$$

$$\cdot X^{-1} = \frac{1}{a^2 - 4b^2} (2aI - X) = M_{\left(\frac{a}{a^2-4b^2}, \frac{-b}{a^2-4b^2}\right)} \text{ : إذن } X \text{ تقبل مقلوبا في } (V, +, \times) \text{ هو :}$$

التسريخ الثاني :

ليكن u عددا عقديا مخالفا للعدد $1-i$.

$$.1 \text{ أ- } (iu - 1 - i)^2 = -u^2 + 2(1-i)u + 2i$$

$$\text{ب- نعتبر في المجموعة } \mathbb{C} \text{ المعادلة } z^2 - 2(u+1-i)z + 2u^2 - 4i = 0 \text{ (*)}$$

لنحسب المميز المختصر للمعادلة (*). حسب السؤال أعلاه ، لدينا :

$$\Delta' = (u+1-i)^2 - (2u^2 - 4i) = -u^2 + 2(1-i)u + 2i = (iu - 1 - i)^2$$

$$z_1 = u + 1 - i + iu - 1 - i = \boxed{(1+i)u - 2i} \text{ : إذن للمعادلة (*) حلين مختلفين هما :}$$

$$z_2 = u + 1 - i - iu + 1 + i = \boxed{2 + (1-i)u} \text{ و}$$

$$\cdot S = \left\{ (1+i)u - 2i, 2 + (1-i)u \right\} \text{ وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة (*) هي :}$$

$$.2 \text{ في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر ، نعتبر النقط } A \left((1+i)u - 2i \right) \text{ و } B \left((1-i)u + 2 \right) \text{ و } U(u)$$

$$\text{ و } \Omega(2-2i)$$

$$\text{أ- لدينا } I \text{ منتصف القطعة } [AB] \text{ . إذن لحق النقطة } I \text{ هو :}$$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{(1+i)u - 2i + (1-i)u + 2}{2} = \boxed{1-i+u}$$

t هي الإزاحة ذات المتجهة \bar{u} التي تحول النقطة U إلى النقطة I . لنحدد لاحق المتجهة \bar{u} . لدينا :

$$\bar{u}(1, -1) : \text{إذن } z_{\bar{u}} = z_I - z_U = 1-i+u - u = \boxed{1-i}$$

ب- الكتابة العقدية للدوران R الذي مركزه $\Omega(2-2i)$ وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ هي : $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}z + \left(1-e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)z_{\Omega}$ أي :

$$z' = -iz + (1+i)(2-2i) \text{ يكافئ } \boxed{z' = -iz + 4}$$

$$\text{وبما أن } \boxed{R(A) = B} \text{ فإن } -iz_A + 4 = -i((1+i)u - 2i) + 4 = (1-i)u + 2 = z_B$$

ج- لدينا $R\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)(A) = B$. إذن : $\left(\overline{\Omega A}, \overline{\Omega B}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ و $\Omega A = \Omega B$. ومنه فإن ΩAB مثلث قائم

الزاوية في Ω ولدينا I منتصف القطعة $[AB]$. $\boxed{(\Omega I) \perp (AB)}$.

د- إنشاء النقطتين A و B انطلاقا من النقطة U :

✓ لدينا : $t(U) = I$ ، هكذا ننشئ النقطة I بحيث : $\overline{UI} = \bar{u}$.

✓ بما أن $(\Omega I) \perp (AB)$ ، فإن النقطتين A و B تنتميان إلى المستقيم (Δ) المار من النقطة I و العمودي على المستقيم

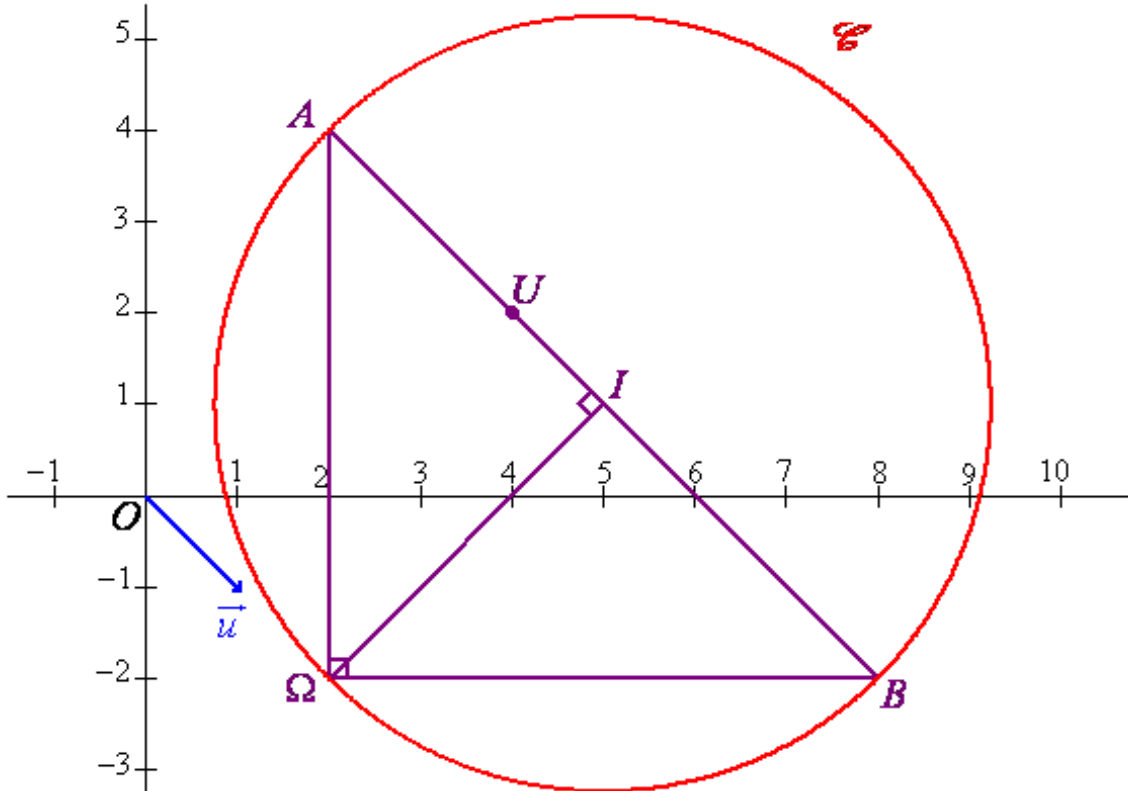
(ΩI) .

✓ بما أن ΩAB مثلث قائم الزاوية في Ω و I منتصف القطعة $[AB]$ ، فإن I هو مركز الدائرة \mathcal{C} المحيطة بالمثلث

ΩAB . إذن A و B همل نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) والدائرة \mathcal{C} . ويتم اختيار النقطتين A و B بحيث يكون ΩAB

مثلثا غير مباشر $\left(\left(\overline{\Omega A}, \overline{\Omega B}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]\right)$

إنشاء الشكل في حالة $U(4+2i)$:



3. نضع : $u = a(1+i) - 2i$ حيث $(a \in \mathbb{R})$.

أ- لنحدد لحقي المتجهتين \overline{AB} و \overline{AU} بدلالة a :

$$\text{Aff}(\overline{AB}) = z_B - z_A = (1-i)u + 2 - (1+i)u + 2i = \boxed{2(1-i)(a-1)}$$

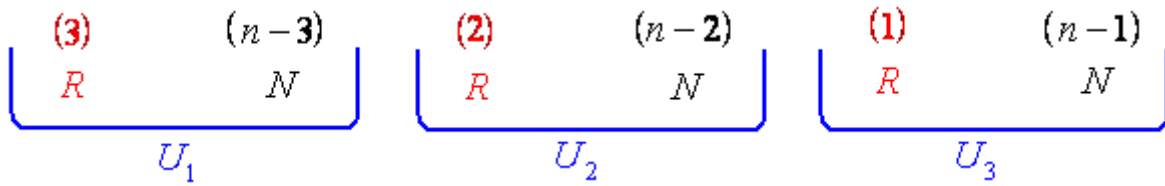
$$\text{Aff}(\overline{AU}) = z_U - z_A = a(1+i) - 2i - (1+i)u + 2i = \boxed{(1-i)(a-2)}$$

ب- بما أن $u \neq 1-i$ ، فإن : $a \neq 1$. إذن : $\text{Aff}(\overline{AU}) = \text{Aff}\left(\frac{a-2}{2(a-1)}\overline{AB}\right)$ ، ومنه فإن :

$$\overline{AU} = \frac{a-2}{2(a-1)}\overline{AB}$$

التمرين الثالث :

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 4$.



نعتبر التجربة العشوائية التالية : نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة، ثم نسحب تائيا كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1. القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي 0 و 1 و 2 ولدينا مجموعة القيم كما يلي : $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

2. نعتبر الأحداث التالية : A_i : « اختيار الصندوق U_i » ، حيث $1 \leq i \leq 3$.

لدينا A_1 و A_2 و A_3 أحداث غير منسجمة مثنى مثنى واتحادهما Ω ، فهي تكون تجزينا للفضاء Ω .
حسب صيغة الاحتمالات الكلية ، لدينا :

$$\begin{aligned} p(X=2) &= p(A_1)p_{A_1}(X=2) + p(A_2)p_{A_2}(X=2) + p(A_3)p_{A_3}(X=2) \\ &= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^2}{C_n^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_n^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{p(X=2) = \frac{8}{3n(n-1)}}$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} ; C_2^2 = 1 ; C_3^2 = 3$$

ب- لدينا :

$$\begin{aligned} p(X=1) &= p(A_1)p_{A_1}(X=1) + p(A_2)p_{A_2}(X=1) + p(A_3)p_{A_3}(X=1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{C_1^1 C_{n-1}^1}{C_n^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^1 C_{n-2}^1}{C_n^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^1 C_{n-3}^1}{C_n^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{p(X=1) = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}}$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} ; C_{n-1}^1 = n-1 ; C_{n-2}^1 = n-2 ; C_1^1 = 1 ; C_2^1 = 2 ; C_3^1 = 3$$

جـ لدينا : $p(X=0)=1-p(X=1)-p(X=2)=1-\frac{8}{3n(n-1)}-\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}=\frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$ ومنه نستنتج قانون احتمال X كما يلي :

قيم X : x_k	0	1	2
$p_k = p(X=x_k)$	$\frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$	$\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$	$\frac{8}{3n(n-1)}$

3. علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين ، احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق U_3 هو : $p_{(X=2)}(A_3)$

حسب صيغة الاحتمالات المركبة ، لدينا :

$$p(X=2)p_{(X=2)}(A_3)=p(A_3)p_{A_3}(X=2) \Rightarrow \frac{8}{3n(n-1)}p_{(X=2)}(A_3)=\frac{1}{3}\frac{C_3^2}{C_n^2}$$

$$\Rightarrow p_{(X=2)}(A_3)=\frac{3}{4}$$

المسألة :

ا. لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^+ , g(x)=2(1-e^{-x})-x$

1. أ- لكل x من \mathbb{R}^+ ، لدينا : $g'(x)=2(1-e^{-x})'-x'=2e^{-x}-1$ ، ولدينا :

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{-x}-1=0 \Leftrightarrow e^{-x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x=\ln 2$$

إذن : $\forall x \in [0, \ln 2]$ ، $g'(x) \geq 0$ و $\forall x \in [\ln 2, +\infty[$ ، $g'(x) \leq 0$

ب- تغيرات الدالة g :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)=\lim_{x \rightarrow +\infty} 2(1-e^{-x})-x=-\infty$ ، لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}=0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x=+\infty$. إذن :

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$1-\ln 2$	$-\infty$

2. أ- بما أن g دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[\ln 4, \ln 6]$ و $g(\ln 4)=\frac{3}{2}-2\ln 2 \approx 0,1$ و $g(\ln 6)=\frac{5}{3}-\ln 6 \approx -0,14$

و $g(\ln 4) \times g(\ln 6) < 0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة ، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]\ln 4, \ln 6[$.

ب- g دالة تناقصية على المجال $[\ln 2, +\infty[$. إذن : $\forall x \in]\alpha, +\infty[$ ، $x > \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha) \Rightarrow g(x) < 0$

و $\forall x \in [\ln 2, \alpha[$ ، $x < \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha) \Rightarrow g(x) > 0$

$\forall x \in]0, \ln 2]$, $\ln 2 \geq x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0$: إذن $[0, \ln 2]$ المجال على g دالة تزايدية على المجال $[0, \ln 2]$.
 خلاصة : $g(0) = g(\alpha) = 0$ و $\forall x \in]\alpha, +\infty[$, $g(x) < 0$ و $\forall x \in]0, \alpha[$, $g(x) > 0$.
 3. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n}) , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- لدينا :

✓ من أجل $n = 0$, $u_0 = 1$, إذن $1 \leq u_0 < \alpha$, لأن $1 = \ln e < \ln 4 < \alpha$.
 ✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$. نفترض أن $1 \leq u_n < \alpha$ ونبين أن $1 \leq u_{n+1} < \alpha$:

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n < \alpha &\Rightarrow -\alpha < -u_n \leq -1 \\ &\Rightarrow e^{-\alpha} < e^{-u_n} \leq e^{-1} \\ &\Rightarrow 1 - e^{-1} \leq 1 - e^{-u_n} < 1 - e^{-\alpha} \\ &\Rightarrow 2(1 - e^{-1}) \leq 2(1 - e^{-u_n}) < 2(1 - e^{-\alpha}) \\ &\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < \alpha \end{aligned}$$

لأن : $g(1) \geq 0 \Rightarrow 2(1 - e^{-1}) \geq 1$ و $g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2(1 - e^{-\alpha}) - \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{2(1 - e^{-\alpha}) = \alpha}$

✓ خلاصة : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < \alpha$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$. لدينا : $u_{n+1} - u_n = 2(1 - e^{-u_n}) - u_n = g(u_n)$

ج- ليكن $n \in \mathbb{N}$. لدينا : $u_n \in [1, \alpha[$. إذن $g(u_n) > 0$, ومنه فإن : $u_{n+1} - u_n > 0$. وهذا يعني أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

د- لدينا : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد α . إذن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l ينبغي تحديدها ؟

نضع : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) = 2(1 - e^{-x})$. لدينا :

✓ h دالة متصلة على المجال $[1, \alpha]$.

✓ $\forall x \in [1, \alpha]$, $h'(x) = 2(1 - e^{-x})' = 2e^{-x} > 0$. إذن h تزايدية قطعاً على $[1, \alpha]$, ومنه فإن :

$g(1) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq h(1)$, $h(\alpha) = \alpha$: لأن $h([1, \alpha]) = [h(1), h(\alpha)] \subset [1, \alpha]$

✓ $u_0 = 1 \in [1, \alpha]$

✓ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l .

إذن : $h(l) = l$ و $l \in [1, \alpha]$. حسب السؤال 2.ب . لدينا : $l = \alpha$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha}$$

II. نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي : $f(x) = \frac{1 - e^x}{x^2}$

1. حساب نهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$: لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} (e^{-x} - 1) = \boxed{-\infty}$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x} \right) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$: لأن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \left(\frac{-1}{x} \right) = \boxed{-\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty : \text{لأن} , \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} (e^{-x} - 1) = \boxed{-\infty}$$

$$2. \text{أ- نعلم أن} : g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2(1-e^{-\alpha}) = \alpha \Rightarrow e^{\alpha} - 1 = \frac{\alpha}{2} e^{\alpha} \Rightarrow \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) e^{\alpha} = 1 \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{2}{2-\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{1-e^{\alpha}}{\alpha^2} = \frac{1-\frac{2}{2-\alpha}}{\alpha^2} = \frac{-\alpha}{\alpha^2(2-\alpha)} = \boxed{\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}}$$

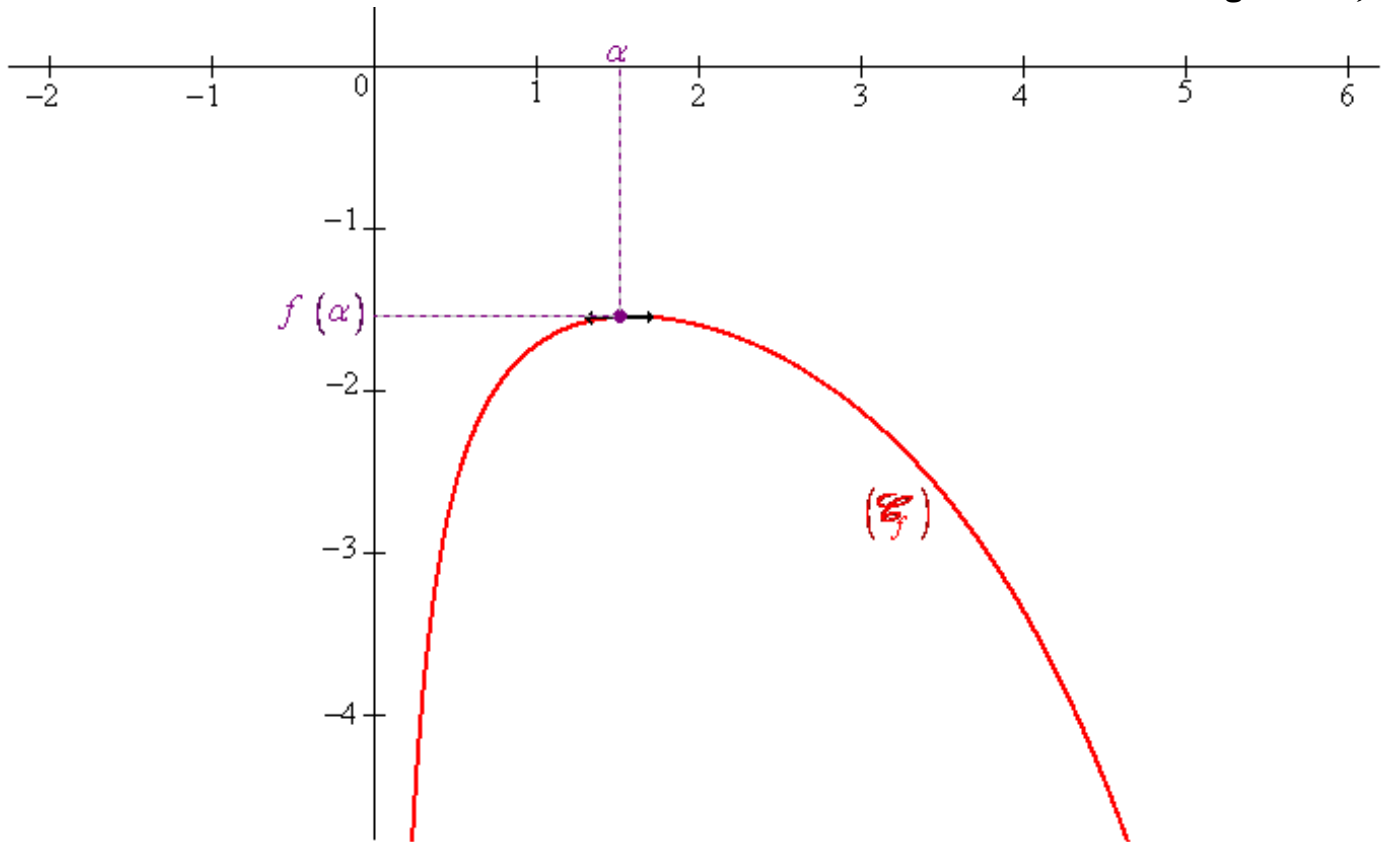
ب- ليكن $x \in \mathbb{R}_+^*$ لدينا :

$$f'(x) = \left(\frac{1-e^x}{x^2}\right)' = \frac{-e^x x^2 - 2x(1-e^x)}{x^2} = \frac{e^x(-x - 2(e^{-x} - 1))}{x^3} = \boxed{\frac{e^x g(x)}{x^3}}$$

إشارة $f'(x)$ على \mathbb{R}_+^* هي إشارة $g(x)$ ، ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			1	
			$\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$	
	$-\infty$			$-\infty$

3. إنشاء المنحنى \mathcal{C} :



III. نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt, & x > 0 \\ F(0) = -\ln 2 \end{cases}$$

1. أ- ليكن $x > 0$. لدينا : $u : t \mapsto 1-e^t$ و $v : t \mapsto \frac{-1}{t}$ دالتان متصلتان وقابلتان للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ و

$u' : t \mapsto -e^t$ و $v' : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ دالتان متصلتان على المجال $]0, +\infty[$. إذن حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt = \int_x^{2x} (1-e^t) \left(-\frac{1}{t} \right)' dt = \left[\frac{e^t-1}{t} \right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

$$F(x) = \boxed{\frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt}$$

ب- لكل $x > 0$ ولكل $t \in [x, 2x]$ لدينا : $\frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}$ $\Rightarrow e^x \leq e^t \leq e^{2x} \Rightarrow x \leq t \leq 2x$

إذن : $e^x \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ أي : $\boxed{e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2}$ ، لأن :

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = [\ln t]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln x = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln 2$$

ج- بما أن $e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$ و $\forall x \in]0, +\infty[: e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$ ، $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^x \ln 2 = \ln 2$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{2x} \ln 2 = \ln 2$ ،

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln 2}$$
 فإن :

استنتاج : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = -\ln 2 = F(0)$ ، لأن :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln 2 \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^x-1}{x} = 1 \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 1$$

ومنه نستنتج أن دالة متصلة على اليمين في الصفر.

2. أ- ليكن $x > 0$ و $t \in [x, 2x]$ لدينا :

$$x \leq t \leq 2x \Rightarrow e^x \leq e^t \leq e^{2x}$$

$$\Rightarrow 1-e^t \leq 1-e^x$$

$$\Rightarrow \frac{1-e^t}{t^2} \leq \frac{1-e^x}{t^2}$$

$$\Rightarrow F(x) \leq (1-e^x) \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$$

$$\Rightarrow F(x) \leq (1-e^x) \left[\frac{-1}{t} \right]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$$

ومنه فإن : $\forall x \in]0, +\infty[: F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$

2. ب- بما أن $\forall x \in]0, +\infty[: F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} (e^{-x} - 1) = -\infty$ ، لأن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \boxed{-\infty} \text{ ، فإن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

3. لدينا $t \mapsto \frac{1-e^t}{t^2}$ دالة متصلة على المجال $]0, +\infty[$ ، إذن فهي تقبل دالة أصلية φ على المجال $]0, +\infty[$ ولدينا :

$$\forall x \in]0, +\infty[: F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt = \left[\varphi(t) \right]_x^{2x} = \varphi(2x) - \varphi(x)$$

نعلم أن φ و $w : x \mapsto 2x$ دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ، إذن $x \mapsto \varphi(2x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ، وعليه فإن F دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ، ولكل x من المجال $]0, +\infty[$ ، لدينا :

$$F'(x) = \left(\varphi(2x) - \varphi(x) \right)' = (2x)' \varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2 \frac{1-e^{2x}}{4x^2} - \frac{1-e^x}{x^2} F'(x) = \boxed{-\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2}$$

4. أ- ليكن $x > 0$

✓ F دالة متصلة على المجال $[0, x]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]0, x[$. حسب مبرهنة التزايديات المنتهية ، لدينا :

$$\exists \beta \in]0, x[/ F(x) - F(0) = F'(\beta)(x - 0)$$

$$\text{أي : } \exists \beta \in]0, x[/ F(x) - F(0) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^\beta - 1}{\beta} \right) x$$

✓ \exp دالة متصلة على المجال $[0, \beta]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]0, \beta[$. حسب مبرهنة التزايديات المنتهية ، لدينا :

$$\exists c \in]0, \beta[/ e^\beta - 1 = e^c \beta : \text{أي } \exists c \in]0, \beta[/ \exp(\beta) - \exp(0) = \exp'(c)(\beta - 0)$$

$$\text{وبالتالي فإن : } \exists c \in]0, x[/ F(x) - F(0) = -\frac{1}{2} x e^{2c}$$

ب- لدينا :

$$0 < c < x \Rightarrow 0 < 2c < 2x$$

$$\Rightarrow 1 < e^{2c} < e^{2x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} e^{2x} < -\frac{1}{2} e^{2c} < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} e^{2x} < \frac{F(x) - F(0)}{x} < -\frac{1}{2}$$

$$\text{إذن : } \forall x \in]0, +\infty[: -\frac{1}{2} e^{2x} < \frac{F(x) - F(0)}{x} < -\frac{1}{2}$$

$$\text{ج- بما أن : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \text{ و } \forall x \in]0, +\infty[: -\frac{1}{2} e^{2x} < \frac{F(x) - F(0)}{x} < -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = -\frac{1}{2} \text{ ، فإن : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{2} e^{2x} = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن F دالة قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر ولدينا : $F'_d(0) = -\frac{1}{2}$

إضافات :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$ و $\frac{F(x)}{x} \leq \frac{1-e^x}{2x^2}$ و $\forall x \in]0, +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ : لأن ، } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x^2} (e^{-x} - 1) = -\infty$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = -\infty$. ومنه فإن المنحنى \mathcal{C}_F يقبل فرعاً شلجيمياً بجوار $+\infty$ اتجاهه محور الأرتيب .

جدول تغيرات الدالة F :

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	$-\frac{1}{2}$	-
$F(x)$	$-\ln 2$	$-\infty$

إنشاء المنحنى \mathcal{C}_F :

