الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2011

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,0 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين $\mathbb{A}$ و $\mathbb{I}$ المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

نضع : $\mathbb{A}^0=\mathbb{I}$ و $\mathbb{A}^1=\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2=\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: \mathbb{A}^{n+1}=\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}$

0,50 ن ① بين أن : $\forall k\in\mathbb{N}:\ \mathbb{A}^{2k}=\mathbb{I}$

0,50 ن ② بين أن المصفوفة $\mathbb{A}$ تقبل مقلوبا $\mathbb{A}^{-1}$ ينبغي تحديده.

ليكن α عددا حقيقيا موجبا قطعا .

لكل x و y من المجال $I=]\alpha,+\infty[$ نضع : $x*y=(x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha$

0,50 ن ① أ بين أن : $*$ قانون تركيب داخلي في I

0,50 ن ب بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي

0,50 ن ج بين أن المجموعة $(I,*)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده

0,50 ن ② بين أن المجموعة $(I,*)$ زمرة تبادلية

③ نعتبر التطبيق :
$$\varphi:\ I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*,\qquad x \longmapsto \frac{1}{x-\alpha}$$

0,50 ن أ بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ إلى $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

0,50 ن ب حل في المجموعة I المعادلة : $x^{(3)}=\alpha^3+\alpha$ بحيث : $x^{(3)}=x*x*x$

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي : $N=\underbrace{111\ldots11}_{\text{2010 مرة 1}}$

0,25 ن ① بين أن N يقبل القسمة على العدد 11

0,75 ن ② أ تحقق أن العدد 2011 أولي , و أن : $10^{2010}-1=9N$

0,50 ن ب بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$

0,50 ن ج استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N .

0,50 ن ③ بين أن العدد N يقبل القسمة على العدد 22121 .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) ليكن m عددا عقديا غير منعدم . نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E_m) :\ z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$$

1 تحقق أن العدد $z_1 = 2 - m$ حل للمعادلة (E_m) . — 0,50 ن

2 ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m) .

أ) بين أن $z_1 z_2 = 1 \iff im^2 + 2(1-i) - 3 = 0$ — 0,50 ن

ب) حدد قيمتي m بحيث $z_1 z_2 = 1$ — 1,00 ن

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر التطبيق S الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث : $z' = -(z-1) + 1$

و الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $(1+i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن z'' لحق النقطة M'' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$.

1 أ) بين أن التطبيق S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللحق 1 — 0,25 ن

ب) بين أن : $z'' = iz + 2$. — 0,25 ن

2 نفترض أن النقطة M تخالف O أصل المعلم و لتكن A النقطة التي لحقها 2

أ) أحسب $\frac{z''-2}{z'-2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M''$ — 0,50 ن

ب) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة. — 0,50 ن

التمرين الرابع : (6,5 ن)

(I) دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $(E) :\ e^x = x^n$ بحيث $n \in \mathbb{N}^*$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة : $\mathcal{D} = [0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\ln x} \ ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1 تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا : $\left(e^x = x^n \iff n = f(x)\right)$. — 0,25 ن

2 بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0. — 0,50 ن

3 أحسب النهايات التالية ثم أوّل هندسيا النتائج المحصل عليها : — 1,50 ن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1^+} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1^-} f(x)$$

4 أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $[0,1[$ و $]1,+\infty[$ ثم إعط جدول تغيراتها. — 0,75 ن

5 بين أن $(\mathcal{C})$ يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج احداثيتيها. — 0,50 ن

6 أنشىء المنحنى $(\mathcal{C})$ — 0,50 ن

7 بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين α_n و b_n بحيث $1 < \alpha_n < e < b_n$. — 0,50 ن

(II) دراسة تقارب المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\geq3}$ و $(b_n)_{n\geq3}$.

0,50 ن — ① بين أن $(\forall n \geq 3)\ :\ b_n \geq n$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n\geq3}$

0,50 ن — ② ⓐ بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .

0,50 ن — ⓑ بين أن $(\forall n \geq 3):\ \frac{1}{n} < ln(\alpha_n) < \frac{e}{n}$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq3}$.

0,50 ن — ⓒ بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = e$

التمرين الخامس: (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\boxed{F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt}$

0,50 ن — ① ⓐ بين أن : $(\forall x \geq 0)\ :\ \ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$.

0,50 ن — ⓑ بين أن : $(\forall x \geq 1)\ :\ \ e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$.

0,50 ن — ② بين أن : F قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ و أن : $(\forall x \geq 0)\ :\ \ F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$.

③ نعتبر الدالة العددية G المعرفة على $[0,\frac{\pi}{2}]$ بما يلي : $\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

0,25 ن — ⓐ بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.

0,75 ن — ⓑ بين أنه يوجد عدد حقيقي c ينتمي إلى المجال $]0,+\infty[$ بحيث : $F'(c) = 0$ و أن $F(c) = \frac{1}{2c}e^{-2c^2}$.

(يمكن تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة G على المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$)

④ نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $H(x) = F'(x)\frac{e^{x^2}}{2x}$

0,50 ن — ⓐ بين أن الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

0,50 ن — ⓑ استنتج أن العدد c وحيد ثم إعط جدول تغيرات الدالة F .

الإمتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2011

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

لكل x و y من المجال $I =]0,1[$ نضع : $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

0,50 ن | ① أ) بين أن $(*)$ قانون تركيب داخلي في I .

0,50 ن | ب) بين أن القانون $(*)$ تبادلي و تجميعي .

0,50 ن | ج) بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا ينبغي تحديده.

0,50 ن | ② بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية.

③ نعتبر المجموعتين : $\mathbb{H} = \{\ 2^n\ /\ n\epsilon\mathbb{Z}\}$ و $\mathbb{K} = \left\{ \dfrac{1}{2^n+1}\ /\ n\epsilon\mathbb{Z} \right\}$

0,50 ن | أ) بين أن $\mathbb{H}$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

0,50 ن | ب) نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي :

$$\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow I, \quad x \longrightarrow \frac{1}{x+1}$$

بين أن التطبيق φ تشاكل من $(\mathbb{H},\times)$ إلى $(I,*)$

0,50 ن | ج) استنتج أن $(\mathbb{K},*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$.

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق $10^x \equiv 2[19]$.

0,25 ن | ① أ) تحقق أن : $10^{x+1} \equiv 1[19]$.

0,50 ن | ب) بين أن : $10^{18} \equiv 1[19]$.

② ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $(x+1)$.

0,75 ن | أ) بين أن : $10^d \equiv 1[19]$.

0,50 ن | ب) بين أن : $d \equiv 18$.

0,50 ن | ج) استنتج أن : $x \equiv 17[18]$.

التمرين الثالث : (4,0 ن)

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) :\ z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$$

0,50 ن | ① بين أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E) .

0,50 ن | ② حدد العددين العقديين α و β بحيث :

$$(\forall z\epsilon\mathbb{C}) :\ z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

0,50 ن | ③ أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $(5-12i)$.

0,50 ن | ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=-1+3i$ و $b=-2i$ و $c=2+i$.

0,50 ن — ① بين أن ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في النقطة C.

② نعتبر الدوران $\mathcal{R}_1$ الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران $\mathcal{R}_2$ الذي مركزه A و زاويته $\frac{-2\pi}{3}$.

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و M_1 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_1$ و M_2 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_2$.

0,50 ن — أ) تحقق أن الصيغة العقدية للدوران $\mathcal{R}_1$ هي : $z_1=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$

0,50 ن — ب) حدد z_2 لحق M_2 بدلالة z .

0,50 ن — ج) استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ نقطة **ثابتة** .

التمرين الرابع : (6,0 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $\boxed{f(x)=x+\ln x}$.

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\text{cm})$

1,00 ن — ① أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

0,50 ن — ② أ) ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن — ب) بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} .

0,50 ن — ③ أحسب : $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشىء $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}^{-1})$ منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,50 ن — ④ أ) أحسب التكامل : $\int_1^{e+1}f^{-1}(x)dx$ (يمكن أن تضع $t=f^{-1}(x)$)

0,50 ن — ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C}^{-1})$ و المستقيمات : $x=1$ و $x=e+1$ و $y=x$.

⑤ نعتبر المعادلة : $(E_n)\ :\ x+\ln x=n$.

0,25 ن — أ) بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n .

0,50 ن — ب) حدد قيمة x_1 ثم بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$

0,50 ن — ⑥ أ) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ f(x_n)\le f(n)$ ثم استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\ x_n\le n$.

0,50 ن — ب) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n-\ln n\le x_n$.

0,50 ن — ج) أحسب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n-n}{n}\right)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{n-\ln n}\right)$

التمرين الخامس : (4,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,50 ن ① بين أنه من أجل $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي و حيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(\alpha_n) = 0$.

0,75 ن ② بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة (نضع : $\ell = \lim_{+\infty}(\alpha_n)$)

0,50 ن ③ ⓐ تحقق أنه من أجل $t \neq 1$ لدينا : $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{t^n}{1-t}$

0,50 ن ⓑ استنتج أن : $\alpha_n + \dfrac{(\alpha_n)^2}{2} + \dfrac{(\alpha_n)^3}{3} + \cdots + \dfrac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\,dt$

0,50 ن ④ ⓐ بين أن : $1 + \ln(1-\alpha_n) = -\displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\,dt$

0,50 ن ⓑ بين أن : $(\forall n \geq 2) \; : \quad 0 \leq \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$

0,50 ن ⓙ استنتج أن : $\boxed{\ell = 1 - e^{-1}}$