الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2011
عناصر الإجابة

المادة	الرياضيات	NR24	المعامل	9
الشعب(ة) أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		مدة الإنجاز	4

عناصر الإجابة و سلم التنقيط

التمرين الأول	4 نقط
الجزء الأول:1-	البرهان بالترجع..............................0.5ن
-2	$A^{-1}=A$..................................0.5ن
الجزء الثاني:1-أ)	*قانون تركيب داخلي...................0.5ن
ب)	تبادلية القانون * ....0.25ن تجميعية القانون * 0.25ن
ج)	العنصر المحايد : $e=a+1$ 0.5ن
-2	مماثل x هو : $x'=a+\dfrac{1}{x-a}$ ....0.25ن $(I,*)$ زمرة تبادلية...............0.25ن
3- أ)	φ تقابل.......................... 0.25ن φ تشاكل...................... 0.25ن
ب)	حل المعادلة هو: $x=2a$ إذا كان $a\geq 0$ و المعادلة لا تقبل حلا إذا كان $a<0$ 0.5

التمرين الثاني	2.5 نقطة
-1	قابلية قسمة العدد N على 11 .... 0.25ن
2- أ)	التحقق من أن 2011 عدد أولي ....0.5ن التحقق من أن $10^{2010}-1=9N$....................0.25ن
ب)	حسب مبرهنة فيرما : 2011 يقسم العدد $10^{2010}-1$ 0.5ن
ج)	الإستنتاج باستعمال مبرهنة كوص 0.5ن
-3	نلاحظ أن: $22121=11\times 2011$ وأن 2011 و 11 عددين أوليين فيما بينهما..........0.5ن
التمرين الثالث	3.5 نقطة
الجزء الأول:-1	التحقق..............................0.5ن
2-أ)	التكافؤ.............................. 0.5ن
ب)	قيمتي m هما : $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ و $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ 1ن
الجزء الثاني:1-أ)	.......................0.25ن
ب)	$z''-(1+i)=i\left(z-(1+i)\right)$.............0.25ن

2-أ)	$\dfrac{z''-2}{z'-2}=-i$ ....0.25ن $AM'M''$ متساوي الساقين و قائم الزاوية في A 0.25ن
ب)	(تمنح النقطة كاملة حتى و لو لم يتطرق المترشح للحالات الخاصة) المستقيم الذي معادلته: $x=1$ 0.5ن

التمرين الرابع	6.5 نقطة
الجزء الأول	
1-	$e^x=x^n \Leftrightarrow n=f(x)$ 0.25
2-	قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 ....0.5ن
3-	لكل نهاية من النهايات الأربعة ....0.25ن لكل تأويل من التأويلين 0.25ن
4-	حساب $f'(x)$ ....0.25ن تغيرات f ....0.25ن جدول تغيرات f 0.25ن
5-	$\left(e^2;\dfrac{e^2}{2}\right)$ زوج إحداثيتي نقطة الانعطاف..............0.5ن
6-	إنشاء المنحنى..............0.5ن
7-	وجود و وحدانية a_n و $1<a_n<e$..............0.25ن وجود و وحدانية b_n و $b_n>e$ 0.25ن
الجزء الثاني	
1-	$(\forall n\geq 3)\ b_n\geq n$ ....0.25ن $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=+\infty$ 0.25ن
2-أ)	المتتالية $(a_n)_{n\geq 3}$ تناقصية ....0.25ن استنتاج تقارب $(a_n)_{n\geq 3}$ 0.25ن
ب)	تأطير : $ln(a_n)$ ....0.25ن استنتاج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$ 0.25ن
ج)	استنتاج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n=e$ 0.5ن

التمرين الخامس	3.5نقطة
1-أ)	تأطير $F(x)$ 0.5ن
ب)	$e^{-x^2} \le e^{-x}$ $(\forall x \ge 1)$..............0.25ن استنتاج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$ 0.25ن
2-	قابلية اشتقاق الدالة F ....0.25ن حساب $F'(x)$ 0.25ن
3-أ)	اتصال الدالة G على اليسار في $\frac{\pi}{2}$ ....0.25ن تقبل جميع الحلول الصحيحة: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$ إذن...... أو من أجل $\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}$ لدينا: $0\le G(x)=F(\tan x)\le \tan(x)e^{-\tan x}$ إذن...... أو أية طريقة صحيحة أخرى
ب)	- تطبيق مبرهنة رول : وجود $c_1\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $G'(c_1)=\left(1+\tan^2(c_1)\right)F'(\tan c_1)=0$ ....0.25ن - وجود $c\in]0,+\infty[$ بحيث $F'(c)=0$ $(c=\tan c_1)$ ....0.25ن - $F(c)=\frac{e^{-2c^2}}{2c}$ 0.25ن
4-أ)	الدالة H قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و $H'(x)=-\left(2+\frac{1}{2x^2}\right)e^{-x^2}<0$ 0.5ن
ب)	الدالة H تقابل(متصلة و رتيبة قطعا) و $H(c)=0$ ومنه وحدانية العدد c ....0.25ن جدول تغيرات الدالة F 0.25ن

التمرين الأول : (3,5 ن)

■ ① أ

ليكن x و y عنصرين من $]0,1[$

إذن : $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$

إذن : $-1 < -x < 0$ و $-1 < -y < 0$

إذن : $0 < 1 - x < 1$ و $0 < 1 - y < 1$

و منه : $\boxed{0 < (1-x)(1-y) < 1}$ (1)

و بما أن $xy > 0$ فإن : $(1-x)(1-y) + xy > xy$

يعني : $\boxed{\dfrac{xy}{(1-x)(1-y)+xy} < 1}$ (2)

و لدينا : $xy > 0$ و $xy + (1-x)(1-y) > 0$

إذن : $\boxed{\dfrac{xy}{(1-x)(1-y)+xy} > 0}$ (3)

من (2) و (3) نستنتج أن :

$$(\forall (x,y)\epsilon I^2) \; ; \; 0 < \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall (x,y)\epsilon I^2) \; ; \; 0 < x * y < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall (x,y)\epsilon I^2) \; ; \; x * y \;\epsilon\; I$$

إذن $*$ قانون تركيب داخلي في I .

■ ① ب

ليكن x و y عنصرين من I

لدينا :

$$x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$
$$= \frac{yx}{yx + (1-y)(1-x)}$$
$$= y * x$$

إذن $*$ قانون تبادلي في I .

لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من I .

لدينا :

$$x * (y * z) = \frac{x(y*z)}{x(y*z) + (1-x)\big(1-(y*z)\big)}$$
$$= \frac{xyz}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}$$

و بنفس الطريقة نحسب $(x * y) * z$ نحصل على :

$$(x*y)*z = \frac{xyz}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)} = x * (y * z)$$

$\boxed{\text{و بالتالي : } * \text{ قانون تجميعي في } I \text{ .}}$

■ ① ج

ليكن e العنصر المحايد للقانون $*$ في I .

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; x * e = e * x = x$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; \frac{xe}{xe + (1-x)(1-e)} = x$$

نختزل بالعدد الغير المنعدم x نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; \frac{e}{xe + (1-x)(1-e)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; xe + 1 - e - x + ex = e$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; e = \frac{1}{2} \;\epsilon\;]0,1[$$

إذن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا في I و هو : $\frac{1}{2}$.

■ ②

حصلنا لحد الآن على ما يلي :

- $I =]0,1[$ مجموعة غير فارغة
- $*$ قانون تركيب داخلي في I .
- $*$ يقبل $\frac{1}{2}$ كعنصر محايد في I .
- $*$ تبادلي و تجميعي في I .

إذن لكي تكون $(I,*)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبين أن :

كل عنصر x يقبل مماثلا بالقانون $*$ في المجموعة I .

ليكن x' مماثل x في المجموعة I بالنسبة للقانون $*$

إذن : $$x * x' = x' * x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{xx'}{xx' + (1-x)(1-x')} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x' = (1-x)$$

بما أن : $x \epsilon I$ فإن $1 > x > 0$

إذن : $1 > 1 - x > 0$

و منه $(1-x)$ هو مماثل x بالنسبة لـ $*$ في I .

و بالتالي : $(I,*)$ زمرة تبادلية .

■ ③ أ

لدينا $H = \{2^n \;\; / \;\; n \epsilon \mathbb{Z}\}$

إذن : H جزء غير فارغ من $\mathbb{R}_+^*$

لأن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; 2^n \;\epsilon\; \mathbb{R}_+^*$

ليكن 2^n و 2^m عنصرين من H

لدينا : $2^n \times (2^m)^{-1} = 2^{n-m} \in H$

إذن : $(H,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

■ 3 ب

ليكن x و y عنصرين من H .

لدينا : $\varphi(x) * \varphi(y) = \left(\frac{1}{1+x}\right) * \left(\frac{1}{1+y}\right)$

$$= \frac{\frac{1}{(1+x)(1+y)}}{\frac{1}{(1+x)(1+y)} + \left(1-\frac{1}{1+x}\right)\left(1-\frac{1}{1+y}\right)}$$

$$= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \times \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy}$$

$$= \frac{1}{1+xy} = \varphi(xy)$$

إذن φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$.

■ 3 ج

ليكن 2^n عنصرا من H .

$$\varphi(2^n) = \frac{1}{1+2^n} \in K$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(H) = K$$

لدينا : φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$.

و نعلم أن التشاكل يحافظ على بنية الزمرة.

و لدينا كذلك $(H,\times)$ زمرة جزئية لـ $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ حسب السؤال 3 أ

إذن $(\varphi(H),\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$

و بالتالي : $(K,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$.

التمرين الثاني : (2,5 ن)

■ 1 أ

لدينا : $10^x \equiv 2[19]$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد 10 نجد : $10^{x+1} \equiv 20[19]$

من جهة أخرى لدينا : $20 \equiv 1[19]$

إذن : $\boxed{10^{x+1} \equiv 1[19]}$

■ 1 ب

لدينا 19 عدد أولي.

إذن حسب مبرهنة $(Fermat)$:

$$(\forall\, a \wedge 19 = 1)\ ;\ a^{19-1} \equiv 1[19]$$

من أجل $a = 10$ لدينا $10 \wedge 19 = 1$ إذن : $10^{19-1} \equiv 1[19]$

أي : $\boxed{10^{18} \equiv 1[19]}$

■ 2 أ

نضع : $d = (x+1) \wedge 18$ إذن حسب $(Bezout)$:

$$\exists\, (u,v) \in \mathbb{Z}^2\ ;\ d = 18u + (x+1)v$$

لدينا : $10^{x+1} \equiv 1[19]$ إذن : $(10^{x+1})^v \equiv 1^v[19]$

يعني : $\boxed{10^{(x+1)v} \equiv 1[19]}$ (1)

و لدينا كذلك : $10^{18} \equiv 1[19]$ إذن : $10^{18u} \equiv 1^u[19]$

يعني : $\boxed{10^{18u} \equiv 1[19]}$ (2)

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$10^{18u} \times 10^{v(x+1)} \equiv 1[19]$$

يعني : $10^{18u+v(x+1)} \equiv 1[19]$

و بالتالي : $\boxed{10^d \equiv 1[19]}$

■ 2 ب

لدينا : $d = 18 \wedge (x+1)$

إذن : $\boxed{d \setminus 18}$

و منه : $d \in \{1,2,3,6,9,18\}$

و لدينا : $\begin{cases} 10 \equiv 10[19] \\ 10^2 \equiv 5[19] \\ 10^3 \equiv 12[19] \\ 10^6 \equiv 11[19] \\ 10^9 \equiv 18[19] \\ 10^{18} \equiv 1[19] \end{cases}$

و بالتالي : $\boxed{d = 18}$

■ 2 ج

لدينا : $18 = 18 \wedge (x+1)$

إذن : $18 \,/\, (x+1)$

و بما أن : $18 \,/\, (-18)$

فإن : $18/(x+1) - 18$

أي : $18 \,/\, (x-17)$

و منه : $x \equiv 17[18]$

التمرين الثالث : (4 ن)

الجزء الأول

■ ①

تعويض سهل يمنحك نصف نقطة مجانية.

■ ②

ننشر التعبير : $(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$ نحصل على :

$$(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta) = z^3+(\alpha+2i)z^2+(\beta+2i\alpha)z+2i\beta$$

و منه نستنتج حسب مبدأ مقابلة معاملات الحدود من نفس الدرجة أن :

$$\begin{cases}2i\beta=-10(1+i)\\ \alpha+2i=-(1+2i)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-(1+4i)\\ \beta=5i-5\end{cases}$$

■ ③ أ

ليكن $(x+iy)$ جذرا مربعا للعدد العقدي $(5-12i)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+iy)^2=5-12i\\ |x+iy|=\sqrt{5^2+12^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-y^2)+2ixy=5-12i\\ x^2+y^2=13\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-y^2)=5\\ xy=-6\\ x^2+y^2=13\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=9\\ y^2=4\\ xy=-6\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}x=-3 \text{ أو } x=3\\ y=2 \text{ أو } y=-2\end{cases}}$$

إذن الجذران المربعان للعدد العقدي $5-12i$ هما : $(3-2i)$ و $(-3+2i)$

■ ③ ب

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(z+2i)(z^2-(1+4i)z-5+5i)=0$$

يجب إذن حل المعادلة التالية أولا : $z^2-(1+4i)z-5+5i=0$

لدينا : $\Delta=(1+4i)^2-4(-5+5i)$

$$=5-12i$$

$$=(3-2i)^2$$

إذن : $z_1=-1+3i$ و $z_2=2+i$

و بالتالي : المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول مختلفة و هي :

$$-2i \text{ و } 2+i \text{ و } -1+3i$$

الجزء الثاني

■ ①

لدينا : $\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{-1+3i-2-i}{-2i-2-i}=\dfrac{3-2i}{2+3i}=-i=e^{\frac{-i\pi}{2}}$

و منه : $\boxed{\left(\overline{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]}$ (1)

و لدينا كذلك : $\left|\dfrac{a-c}{b-c}\right|=|-i|=1$

إذن : $\boxed{\dfrac{CA}{CB}=1}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في C .

■ ② أ

نضع : $M(z)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

لدينا : $\mathcal{R}_1(M)=M_1$

$$\Leftrightarrow (z_1-b)=e^{\frac{i\pi}{3}}(z-b)$$

$$\Leftrightarrow (z_1+2i)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z+2i)$$

$$\Leftrightarrow z_1=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$$

■ ② ب

لدينا : $\mathcal{R}_2(M)=M_2$

$$\Leftrightarrow (z_2-a)=e^{\frac{-2i\pi}{3}}(z-a)$$

$$\Leftrightarrow (z_2+1-3i)=\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z+1-3i)$$

$$\Leftrightarrow z_2=-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-(1-3i)\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

■ ② ج

لدينا I هي منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

$$\Leftrightarrow aff(I)=\frac{z_1+z_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(I)=-\sqrt{3}-i-\frac{(1-3i)(3+i\sqrt{3})}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(I)=constante\ complexe$$

إذن $aff(I)$ عدد عقدي ثابت.

أي : I نقطة ثابتة في المستوى.

التمرين الرابع : (6 ن)

1 ■

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

2 أ ■

ليكن x عنصرا من $]0,+\infty[$

لدينا f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالتين

قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2 ب ■

لدينا f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

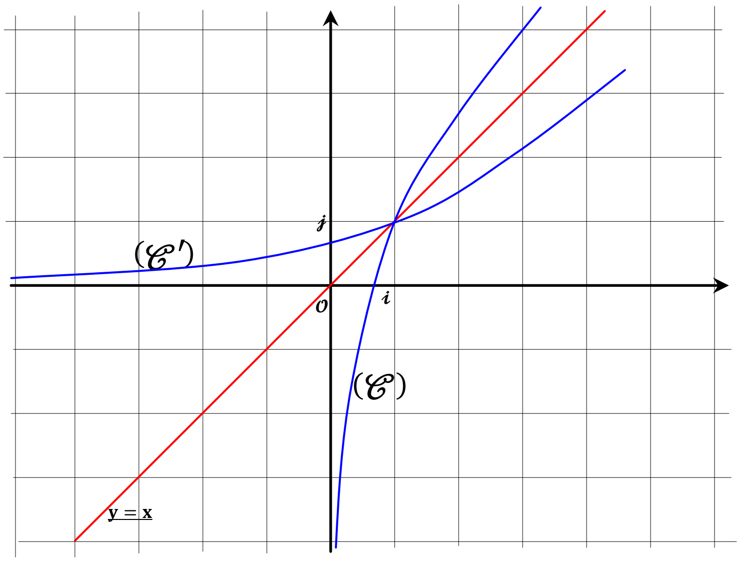
إذن f تقابل من $]0,+\infty[$ نحو صورته $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

و تقابله العكسي f^{-1} دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f^{-1}	0 ↗	$+\infty$

3 ■

$$f(1) = 1 + \ln 1 = 1$$
$$f(e) = e + \ln e = e + 1 \approx 3,72$$



4 أ ■

لنحسب التكامل : $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx$

من أجل ذلك نضع : $t = f^{-1}(x)$ إذن : $x = f(t)$

و منه : $\frac{dx}{dt} = f'(t)$

إذن :
$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx = \int_1^e t f'(t)\,dt$$
$$= [tf(t)]_1^e - \int_1^e f(t)\,dt$$
$$= [tf(t)]_1^e - \left[\frac{t^2}{2} + t\ln t - t\right]_1^e$$
$$= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \approx 4,9$$

4 ب ■

نضع A هي مساحة الحيز المذكور في السؤال إذن :

$$A = \int_1^{e+1} |x - f^{-1}(x)|\,dx$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \int_1^{e+1} x\,dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{e+1} - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\frac{e^2 + 2e}{2}\right) - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \frac{3}{2}$$

■ 5 أ

نضع : $h(x) = x + \ln x - n$

لدينا h دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا كذلك : $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

إذن h دالة تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

و منه h تقابل من $]0,+\infty[$ نحو صورته $]-\infty,+\infty[$

و بما أن : $0 \in]-\infty,+\infty[$ فإنه يمتلك سابقا واحدا x_n بالتقابل h .

يعني : $\exists!\ x_n \in]0,+\infty[\ ;\ h(x_n) = 0$

بتعبير آخر : $\exists!\ x_n \in]0,+\infty[\ ;\ x_n + \ln(x_n) = n$

■ 5 ب

x_1 هو حل المعادلة : $x + \ln x = 1$

إذن : $x_1 = 1$

و لدينا : $f(x_n) = n$ إذن : $x_n = f^{-1}(n)$

و بما أن : f^{-1} دالة تزايدية قطعا فإن :

$$x_{n+1} = f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n) = x_n \quad (1)$$

إذن من النتيجة $x_{n+1} > x_n$ نستنتج أن $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ متتالية تزايدية قطعا.}}$

نفترض أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مكبورة بعدد حقيقي A

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ x_n \leq A$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N})\ :\ f(x_n) \leq f(A) = B$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N})\ :\ n \leq B$

$\Leftrightarrow$ المجموعة $\mathbb{N}$ مكبورة بالعدد B

$\Leftrightarrow$ مستحيل

إذن : $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ غير مكبورة}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متباعدة.

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

■ 6 أ

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow\ n \geq 1$

$\Leftrightarrow\ \ln n \geq 0$

$\Leftrightarrow\ n + \ln n \geq n$

$\Leftrightarrow\ f(n) \geq f(x_n)$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ f(n) \geq f(x_n)$

و بما أن f^{-1} دالة تزايدية فإن : $f^{-1}(f(n)) \geq f^{-1}(f(x_n))$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n \geq x_n}$

■ 6 ب

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n \geq x_n$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \frac{x_n}{n} \leq 1$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \leq 0$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \ln(x_n) - \ln(n) \leq 0$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \underbrace{x_n + \ln(x_n)}_{n} - \ln(n) \leq x_n$

$\Leftrightarrow\ \boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n - \ln(n) \leq x_n}$

ملاحظة :

لدينا :

$$\lim_{n\infty}(n - \ln n) = \lim_{n\infty} n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = (+\infty)(1-0) = +\infty$$

إذن : $\underbrace{n - \ln(n)}_{+\infty} \leq x_n$

و هذا دليل آخر على أن : $\lim\limits_{n\infty} x_n = +\infty$

■ 6 ج

لدينا : $n - \ln n \leq x_n$

إذن : $\frac{n - x_n}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$

و منه : $\left|\frac{n - x_n}{n}\right| \leq \frac{\ln n}{n}$

و بما أن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0$

فإن : $\lim\limits_{n\infty}\left|\frac{n - x_n}{n}\right| = 0$

أي : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{x_n - n}{n}\right) = 0$

و لدينا حسب السؤالين أ و ب : $n - \ln n \leq x_n \leq n$

إذن : $\frac{n - \ln n}{n - \ln n} \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \frac{n}{n - \ln n}$

يعني : $1 \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \frac{n}{n - \ln n}$

و بما أن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{n}{n - \ln n}\right) = \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{1 - \frac{\ln n}{n}}\right) = 1$

فإن : $\underbrace{1}_{1} \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \underbrace{\frac{n}{n - \ln n}}_{1}$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{x_n}{n - \ln n}\right) = 1}$

التمرين الخامس : (4 ن)

■ ①

لدينا f_n دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0,1[$.

و لدينا : $\forall\, x \in]0,1[\ ;\ f_n'(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} > 0$

إذن : f_n دالة تزايدية قطعا على $]0,1[$

و منه f_n تقابل من $]0,1[$ نحو $]f_n(0), f_n(1)[$

لدينا : $f_n(0) = -1 < 0$

و $f_n(1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} > 0$

إذن : $0 \in]f_n(0), f_n(1)[$

و منه : 0 يمتلك سابقا واحدا α_n بالتقابل f_n

يعني : $\exists!\ \alpha_n \in]0,1[\ ;\ \ f_n(\alpha_n) = 0$

■ ②

لدينا : $f_{n+1}(x) = -1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n} + \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\Leftrightarrow\ \ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

و بما أن : $x \in]0,1[$ فإن : $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} > 0$

و منه : $\forall\, x \in]0,1[\ ;\ \ f_{n+1}(x) > f_n(x)$

و لدينا كذلك : $\alpha_{n+1} \in]0,1[$ إذن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$

و نعلم أن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_n) = 0$

إذن : $f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$

و بما أن f_n دالة تزايدية قطعا على $]0,1[$ فإن : $\boxed{\alpha_n > \alpha_{n+1}}$

إذن $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متتالية تناقصية قطعا.

و لدينا : $(\forall n \geq 2)\ ;\ \ 0 < \alpha_n < 1$

يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ مصغورة بالعدد 0

و بالتالي : $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متتالية متقاربة .

■ ③ أ

لدينا $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي t المخالف لـ 1 .

إذن : $1 + t + \cdots + t^{n-1} = \dfrac{1 - t^n}{1 - t} = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{t^n}{1-t}$

■ ③ ب

لدينا من أجل : $t \neq 1$

$$1 + t + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

إذن :

$$\int_0^{\alpha_n} (1 + t + \cdots + t^{n-1})\, dt = \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow\ \ \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

■ ④ أ

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

و نعلم أن : $f_n(\alpha_n) = 0$

يعني : $-1 + \alpha_n + \dfrac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n^n}{n} = 0$

إذن : $1 = -\ln(1-\alpha_n) - \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt$

و منه : $\boxed{1 + \ln(1-\alpha_n) = -\displaystyle\int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt}$

■ ④ ب

ننطلق من الكتابة : $0 \leq t \leq \alpha_n$

$$\Leftrightarrow\ \ 0 \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - t$$

$$\Leftrightarrow\ \ \frac{1}{1-\alpha_n} \geq \frac{1}{1-t} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ \ 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-\alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow\ \ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \frac{1}{(1-\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} t^n\, dt$$

$$\Leftrightarrow\ \ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n} \right) \left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \right)$$

و بما أن : $\alpha_n^{n+1} < 1$

فإن : $\left(\dfrac{1}{1-\alpha_n} \right) \left(\dfrac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \right) \leq \left(\dfrac{1}{1-\alpha_n} \right) \left(\dfrac{1}{n+1} \right)$

و بالتالي :

$$\boxed{(\forall n \geq 2)\ ;\ \ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n} \right) \left(\frac{1}{n+1} \right)}$$

■ ④ ج

لدينا : $\underset{\downarrow 0}{0} \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \underbrace{\left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{\xrightarrow{+\infty} 0}$

إذن : $\lim_{n\infty} \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt = 0$

و منه : $\lim_{n\infty}(1+\ln(1-\alpha_n)) = 0$

نضع : $\ell = \lim_{n\infty} \alpha_n$

إذن : $1+\ln(1-\ell) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ln(1-\ell) = -1\\
&\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{1-\ell}\right) = 1\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1-\ell} = e\\
&\Leftrightarrow e(1-\ell) = 1\\
&\Leftrightarrow e - e\ell = 1\\
&\Leftrightarrow \ell = \frac{e-1}{e}\\
&\Leftrightarrow \boxed{\ell = 1-e^{-1}}
\end{aligned}$$

و الحمد لله رب العالمين ■