



التمرين الأول: (3,5 ن)

الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما .

لكل  $x$  و  $y$  من المجال  $G = ]1,2[$  نضع :  $x * y = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$

بين أن  $*$  قانون تركيب داخلي في المجموعة  $G$  .    1 I 0,50 ن

نذكر أن  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  زمرة تبادلية    2 I

و نعتبر التطبيق  $f$  المعرف من  $\mathbb{R}_+^*$  نحو  $G$  بما يلي :  $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

بين أن  $f$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  نحو  $(G, *)$  .    2 I 0,75 ن

استنتج أن  $(G, *)$  زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد .    2 I 0,50 ن

نذكر أن  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة صفرها :  $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  و وحدتها :  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$     II

و أن  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي و نضع :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

تحقق أن :  $A^3 = \mathcal{O}$  ثم استنتج أن  $A$  قاسم للصفر في الحلقة  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$     1 II 0,50 ن

تحقق أن :  $(A^2 - A + I)(A + I) = I$  .    1 II 0,50 ن

ثم استنتج أن المصفوفة  $(A + I)$  تقبل مقلوبا في  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$  يتم تحديده .

لكل  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$  نضع :  $M(a, b) = a \cdot I + b \cdot A$     2 II 0,75 ن

و نعتبر المجموعة :  $E = \{ M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$

بين أن  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له .

التمرين الثاني: (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 4 كرات من الصندوق و نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي    I

يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق .

حدد قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  .    1 I 1,00 ن

أحسب  $E(X)$  الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  .    2 I 0,50 ن

نجز التجربة العشوائية التالية في ثلاث مراحل كالآتي :    II

المرحلة الأولى : نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق .

المرحلة الثانية : نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى .

المرحلة الثالثة : نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الصندوق الذي أصبح يحتوي على

12 كرة بعد المرحلة الثانية .

نعتبر الأحداث التالية :

- . { الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء } = N  
. { الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء } = R  
. { جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء } = E

بين أن :  $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$   1   ن 0,50

أحسب  $p(E)$   2   ن 0,50

أحسب احتمال الحدث R علما أن الحدث E قد تحقق .  3   ن 0,50



### التمرين الثالث : (3,5 ن)

ليكن  $a$  عددا عقديا يخالف 1 .    1

نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :

$$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

بين أن :  $z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$  و  $z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$  هما حلتي المعادلة (E) .  1   ن 0,50

نأخذ  $a = e^{i\theta}$  حيث  $0 < \theta < \pi$  .  2   1

بين أن :  $a - 1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$   2   1 ن 0,50

استنتج الشكل المثلثي لكل من  $z_1$  و  $z_2$  .  2   1 ن 1,00

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(\sigma, \vec{u}, \vec{v})$  .    11

نفترض أن  $\Re(a) < 0$  و نعتبر النقط  $A(a)$  و  $B(-i)$  و  $C(i)$  و  $B'(1)$  .

حدد لحقي كل من  $J$  و  $K$  منتصفتي القطعتين  $[AC]$  و  $[AB]$  على التوالي بدلالة  $a$  .  1   ن 0,50

ليكن  $r_1$  الدوران الذي مركزه  $J$  و قياس زاويته  $\frac{\pi}{2}$  . و  $r_2$  الدوران الذي مركزه  $K$  و قياس زاويته  $\frac{\pi}{2}$  .  2   ن 0,50

نضع :  $C' = r_1(C)$  و  $A' = r_2(A)$  .

و ليكن  $c'$  لحق  $C'$  و  $a'$  لحق  $A'$  . بين أن :  $a' = z_1$  و  $c' = z_2$  .

أحسب  $\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)$  ثم استنتج أن المستقيم  $(AB')$  ارتفاع في المثلث  $A'B'C'$  .  3   ن 0,50

### التمرين الرابع : (8,25 ن)

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي :  1    
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(x \ln x)^2}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

بين أن الدالة  $f$  متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$   1   1 ن 0,50

أدرس قابلية اشتقاق  $f$  على اليمين في النقطة 0 ( يمكنك استعمال النتيجة  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$  )  1   ن 0,50

بين أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$  . و أن مشتقتها معرفة بـ :  1   ن 0,50

$$(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  .  1   ن 0,50

تكن  $F$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$     2

و ليكن  $(\mathcal{E}_F)$  المنحنى الممثل للدالة  $F$  في معلم متعامد ممنظم  $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$  .

حدد دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$  على المجال  $[e, +\infty[$  .    2  أ

0,25 ن

بين أن :  $(\forall t \geq e) ; t \ln t < \sqrt{1 + (t \ln t)^2} < \sqrt{2} t \ln t$     2  ب

0,50 ن

بين أن :  $(\forall t \geq e) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \ln(\ln x)$     2  ج

0,75 ن

استنتج أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$  و أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$     2  د

0,50 ن

بين أن  $(\mathcal{E}_F)$  يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصول كل واحدة منهما .    2  هـ

0,50 ن

أنشئ  $(\mathcal{E}_F)$  ( نأخذ من أجل ذلك  $F(1) \approx 0,5$  و  $F\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0,4$  )    2  ز

1,00 ن

لكل  $x$  من المجال  $[0, +\infty[$  نضع :  $\varphi(x) = x - F(x)$     3

بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$  ثم ادرس تغيرات الدالة  $\varphi$  .    3  أ

0,75 ن

بين أنه لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ، المعادلة  $\varphi(x) = n$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$  في المجال  $[0, +\infty[$  .    3  ب

0,50 ن

بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_n \geq n$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$     3  ج

0,50 ن

بين أن :  $(\forall n \geq 1) ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$     4  أ

0,50 ن

( من أجل ذلك يمكن استعمال مبرهنة التزايد المتناهية )

أحسب النهاية :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)$     4  ب

0,50 ن

### التمرين الخامس : (1,75 ن)



لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $n$  نضع :  $u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$  و  $v_n = \ln(u_n)$

تحقق أن :  $(\forall n \geq 1) ; v_n = n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))]$     1

0,25 ن

باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية بين أن :    2

0,50 ن

$(\forall n \geq 1) , (\exists c \in ]n ; n+1[) ; v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

بين أن :  $(\forall n \geq 1) ; \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$     3

0,50 ن

أحسب النهاية :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$     4

0,50 ن

# أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2013

## التمرين الأول

1

منهجية التفكير في هذا السؤال :

نضع  $\alpha = (x-1)(y-1)$  و  $\beta = (x-2)(y-2)$  ونريد أن نبين أن :  $\forall(x,y) \in G^2 ; x * y \in G$   
يعني نريد أن نبين أن :  $\forall(x,y) \in G^2 ; 1 < x * y < 2$  من أجل ذلك سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$\forall(x,y) \in G^2 ; x * y > 1$  و  $x * y < 2$   
يعني سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$$\forall(x,y) \in G^2 ; \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} > 0 \text{ و } \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} < 2$$

يعني :  $\forall(x,y) \in G^2 ; \alpha + \beta > 0$  و  $\alpha > 0$  و  $\beta > 0$   
إلى العمل : ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من المجال  $G = ]1,2[$ .

إذن :  $1 < x < 2$  و  $1 < y < 2$ .

و منه :  $0 < (x-1) < 1$  و  $0 < (y-1) < 1$ .

أي :  $0 < (x-1)(y-1) < 1$

و هذا يعني أن الكمية  $(x-1)(y-1)$  كمية موجبة قطعاً .

يعني :  $(x-1)(y-1) > 0$

و لدينا كذلك :  $1 < x < 2$  و  $1 < y < 2$

إذن :  $-1 < (x-2) < 0$  و  $-1 < (y-2) < 0$

يعني أن :  $(x-2)$  و  $(y-2)$  كميتان سالبتان قطعاً .

إذن : جداولهما كمية موجبة قطعاً . يعني :  $(x-2)(y-2) > 0$

في المرحلة الأولى نبين أن :  $\forall(x,y) \in G^2 ; x * y > 1$

و من أجل ذلك ننتقل من الكتابة :  $(x-1)(y-1) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية  $(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)$

نحصل على :  $2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)$

$$> (x-1)(y-1) + (x-1)(y-2)$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعاً التالية :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

نحصل على :  $\frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} > 1$

و هذا يعني أنه :  $\forall(x,y) \in G^2 ; x * y > 1$

في المرحلة الثانية نبين أن : (1)  $\forall(x,y) \in G^2 ; x * y < 2$

و من أجل ذلك ننتقل من الكتابة :  $(x-2)(y-2) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية  $(x-2)(y-2)$

$$2(x-2)(y-2) > (x-2)(y-2)$$

ثم نضيف بعد ذلك إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية  $2(x-1)(y-1)$

نجد :  $2(x-1)(y-1) + 2(x-2)(y-2)$

$$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$$

يعني :  $2[(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)]$

$$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعاً :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

$$2 > \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} : \text{ نجد}$$

يعني :  $\forall(x,y) \in G^2 ; 2 > x * y$  (2)

من النتيجة (1) و (2) نستنتج أن :  $1 < x * y < 2$

يعني :  $\forall(x,y) \in G^2 ; x * y \in G$

و بالتالي \* قانون تركيب داخلي في المجموعة  $G$ .

2

$$f : (\mathbb{R}_+^*, \times) \mapsto (G, *)$$

$$x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$$

لدينا  $f$  تطبيق معرف بما يلي :

لكي يكون التطبيق  $f$  تشاكلاً يكفي أن نتحقق من أن :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* ; f(x \times y) = f(x) * f(y)$$

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من المجموعة  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\text{لدينا : } f(x) * f(y) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right) * \left(\frac{y+2}{y+1}\right)$$

$$= \frac{2\left(\frac{x+2}{x+1} - 1\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 1\right) + \left(\frac{x+2}{x+1} - 2\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 2\right)}{\left(\frac{x+2}{x+1} - 1\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 1\right) + \left(\frac{x+2}{x+1} - 2\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}$$



$$= \frac{xy + 2}{xy + 1} = f(x \times y)$$

إذن :  $f(x) * f(y) = f(x \times y)$

إذن  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  نحو  $(G, *)$ .

لكي يكون  $f$  تقابلاً يكفي أن يحقق ما يلي :

$$(\forall y \in G), (\exists ! x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = y$$

أو بتعبير أسهل : يكون  $f$  تطبيقاً تقابلياً عندما يكون للمعادلة  $f(x) = y$

ذات المجهول  $x$  حل وحيد في  $\mathbb{R}_+^*$  مرتبط بـ  $y$ .

ليكن  $y$  عنصراً من المجموعة  $G$  و لنحل في  $\mathbb{R}_+^*$  المعادلة  $f(x) = y$ .

$$\frac{x+2}{x+1} = y$$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم  $(x+1)$

$$(x+2) = y(x+1)$$

يعني :  $x+2 = xy + y$  يعني :  $x(1-y) = (y-1)$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم  $\frac{1}{1-y}$

$$x = \frac{y-2}{1-y}$$

نلاحظ أن التعبير  $\frac{y-2}{1-y}$  وحيد لأنه إذا افترضنا غير ذلك .

$$x = \frac{y'-2}{1-y'}$$

$$\frac{y-2}{1-y} = \frac{y'-2}{1-y'}$$

$$\text{أي : } y - yy' - 2 + 2y' = y' - 2 - yy' + 2y$$



لدينا :  $A^3 = A \times A \times A$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

إذن :  $A^3 = O$

لدينا المصفوفة  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  هي العنصر المحايد لـ  $+$  في  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

نلاحظ في البداية أن  $A \neq O$

ولدينا :  $A^3 = A \times A^2 = O$

مع :  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$

إذن نستنتج أن  $A \neq O$  و توجد مصفوفة و هي  $A^2$  تخالف  $O$

و تحقق  $A \times A^2 = A^2 \times A = O$

إذن حسب التذكير : المصفوفة  $A$  قاسم للصفر في الحلقة  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$



$$(A^2 - A + I) \times (A + I) = A^3 + A^2 - A^2 - A + A + I$$

$$= A^3 + I = O + I = I$$

و بما أن  $A$  و  $I$  مصفوفتان من  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

فإن المصفوفة  $(A^2 - A + I)$  عنصر من  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و نعلم أن  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة تبادلية وحدتها  $I$  إذن  $\times$  تبادلي في  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

يعني :  $(A + I) \times (A^2 - A + I) = (A^2 - A + I) \times (A + I) = I$

و بالتالي  $(A + I)$  مصفوفة قابلة للقلب في  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$

و مقلوبها هو المصفوفة  $(A^2 - A + I)$ .

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ولدينا كذلك :

$$(A^2 - A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

خلاصة :

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ مقلوب المصفوفة } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ هي المصفوفة}$$

أي :  $(y - y') = 0$  أي :  $y = y'$

و بالتالي فإن التعبير  $\frac{y-2}{1-y}$  وحيد .

إذن المعادلة  $f(x) = y$  تقبل حلا وحيدا و هو  $\frac{y-2}{1-y}$

يكفي الآن أن نتحقق من أن هذا الحل ينتمي إلى  $\mathbb{R}_+^*$  .

يعني أنه يكفي أن نبين أن :  $\forall y \in ]1,2[ ; \frac{y-2}{1-y} > 0$

لدينا :  $1 < y < 2$  إذن :  $-1 < (y - 2) < 0$

و لدينا :  $1 < y < 2$  إذن :  $-1 < (1 - y) < 0$

إذن  $(y - 2)$  و  $(1 - y)$  كميّتان سالبتان قطعا .

أي أن خارجهما كمية موجبة قطعا .

يعني :  $\forall y \in ]1,2[ ; \frac{y-2}{1-y} > 0$

إذن :  $f(x) = y$  :  $(\forall y \in G), (\exists ! x = \frac{y-2}{1-y} \in \mathbb{R}_+^*)$

يعني أن  $f$  تقابل من  $\mathbb{R}_+^*$  نحو  $G$  .

خلاصة :  $f$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  نحو  $(G, *)$  .



نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يُحولها إلى مجموعة الوصول .

يعني أنه عندما نتوفر على تشاكل تقابلي  $f$  من مجموعة  $(E, *)$  نحو  $(F, \top)$

فإنه نستنتج البنية الجبرية للمجموعة  $(F, \top)$  انطلاقا من البنية الجبرية

للمجموعة  $(E, *)$  عن طريق التطبيق  $f$  .

و من ثم :

إذا كان  $*$  تبادلي أو تجميحي في  $E$  فإن  $\top$  تبادلي أو تجميحي في  $F$  .

إذا كان  $e$  هو العنصر المحايد للقانون  $*$  في  $E$  فإن  $f(e)$  هو العنصر

المحايد للقانون  $\top$  في  $F$  .

إذا كان  $x'$  هو ممائل  $x$  بالنسبة للقانون  $*$  في  $E$  فإن  $f(x')$  هو ممائل

$f(x)$  بالنسبة للقانون  $\top$  في  $F$

في هذا السؤال لدينا  $f$  تشاكل تقابلي معرف بما يلي :

$$f : (\mathbb{R}_+^*, \times) \mapsto (G, *)$$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة  $(G, *)$  انطلاقا من البنية الجبرية

لـ  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  عن طريق التطبيق  $f$  .

و بما أن  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1

فإن  $(G, *)$  زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي  $f(1)$

أي العدد  $\frac{3}{2}$  . و للتأكد من ذلك يكفي أن نتحقق من أن :

$$(\forall x \in G) ; x * \frac{3}{2} = \frac{3}{2} * x = x$$



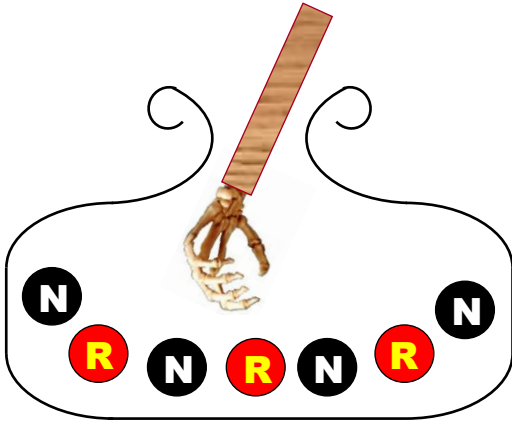
تذكير : لتكن  $(E, *, \top)$  حلقة و  $e$  هو العنصر المحايد للقانون  $*$  في  $E$  .

نقول بأن عنصرا  $x$  من  $E$  قاسم للصفر إذا تحققت الشروط التالية :

$$\begin{cases} x \neq e \\ \exists y \in E \setminus \{e\} ; x \top y = y \top x = e \end{cases}$$

نععتبر الحلقة الواحدية  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$  التي صفرها  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من صندوق يحتوي على 7 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتل  $7^4$  نتيجة ممكنة .

$$\text{يعني : } \text{card}(\Omega) = 7^4 = 2401$$

بحيث :  $\Omega$  هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

$X$  هو المتغير العشوائي الذي يربط كل عملية بعدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق . إذن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي  $X$  هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 . يعني :  $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$

قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  سيكون إذن التطبيق  $P_X$  المعرف على المجموعة  $\{0,1,2,3,4\}$  نحو المجال  $[0,1]$  بما يلي :

$$P_X : \{0,1,2,3,4\} \mapsto [0,1]$$

$$k \mapsto P_X(k) = p[X = k]$$

لنحسب إذن احتمال كل قيمة  $k$  من قيم المتغير العشوائي  $X$  .

**نحسب :  $p[X = 0]$**

الحدث  $[X = 0]$  هو الحصول على أربع كرات كلها حمراء و توجد  $3^4$  امكانية لسحب الكرات الأربع .

$$\text{إذن : } p[X = 0] = \frac{3^4}{7^4} = \frac{81}{2401}$$

**نحسب :  $p[X = 1]$**

الحدث  $[X = 1]$  هو الحصول على كرة سوداء واحدة و ثلاث كرات حمراء . و من أجل ذلك لدينا :

$4^1$  إمكانية لسحب الكرة السوداء

$C_4^1$  إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة السوداء

$3^3$  إمكانية لسحب ثلاث كرات حمراء

$$\text{إذن : } p[X = 1] = \frac{4^1 \times C_4^1 \times 3^3}{7^4} = \frac{432}{2401}$$

**نحسب :  $p[X = 2]$**

الحدث  $[X = 2]$  هو الحصول على كرتين حمراوين و كرتين سوداوين . و من أجل ذلك لدينا :

$4^2$  إمكانية لسحب الكرتين السوداوين .

$C_4^2$  إمكانية لاختيار مكان الكرتين السوداوين .

$3^2$  إمكانية لسحب الكرتين الحمراوين .

$$\text{إذن : } p[X = 2] = \frac{4^2 \times C_4^2 \times 3^2}{7^4} = \frac{864}{2401}$$



لكي يكون  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي يكفي أن نتحقق من الشروط التالية :

$$(\forall x, y \in E) \quad ; \quad \begin{cases} \text{زمرة تبادلية } (E, +) \\ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \\ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \\ (\alpha \times \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \\ 1 \cdot x = x \end{cases}$$

بحيث  $\times$  هو الضرب في  $\mathbb{R}$

و  $+$  هو جمع المصفوفات في  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و  $\cdot$  هو ضرب مصفوفة في عدد حقيقي .

في البداية نبين أن  $(E, +)$  زمرة جزئية من الزمرة  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$

لدينا  $E$  جزء غير فارغ من  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

لتكن  $M(a, b)$  و  $M(c, d)$  مصفوفتان من  $E$  .

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } M(a, b) - M(c, d) &= aI + bA - cI - dA \\ &= (a - c)I + (b - d)A \\ &= M(a - c ; b - d) \in E \end{aligned}$$

إذن  $(E, +)$  زمرة جزئية من الزمرة  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$

و بما أن  $+$  تبادلي في  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  فإن  $(E, +)$  زمرة تبادلية (1)

نستنتج الخاصيات المتبقية من خلال كون  $E$  جزء من الفضاء المتجهي

الحقيقي  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$  و كون  $E$  جزء مستقر بالنسبة للقانون  $(\cdot)$

و ذلك لأن :  $\forall M(a, b) \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R} ; \alpha \cdot M(a, b) = M(\alpha a, \alpha b) \in E$

$$(2) \quad (\forall A, B \in E) \quad ; \quad \begin{cases} \text{زمرة تبادلية } (E, +) \\ \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \\ (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A \\ (\alpha \times \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) \\ 1 \cdot A = A \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن :  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي نعتبر الأسرة  $(I, A)$  .

من الواضح أن الأسرة  $(I, A)$  مولدة للفضاء المتجهي  $(E, +, \cdot)$  .

لأن :  $\forall M(a, b) \in E ; M(a, b) = aI + bA$

يعني أن كل مصفوفة من  $E$  تكتب على شكل تآليفة خطية للمصفوفتين  $I$  و  $A$  لنبين الآن أن الأسرة  $(I, A)$  حرة .

من أجل ذلك ننطلق من تآليفة خطية منعدمة للمصفوفتين  $I$  و  $A$  .

$$a \cdot I + b \cdot A = O$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3b & 2b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 3b & 2b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

إذن الأسرة  $(I, A)$  حرة .

و بما أن  $(I, A)$  أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي  $E$  فإنها أساس لهذا الفضاء المتجهي الحقيقي

$$p(E \cap N) = p_N(E) \times p(N) \text{ : يعني}$$

$$= p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3) \times p(N)$$

$$= \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{7} = \frac{2016}{9240} = \frac{12}{55}$$



$$p(E) = p(E \cap N) + p(E \cap R)$$

$$= \frac{12}{55} + p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)$$

$$= \frac{12}{55} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}$$

$$= \frac{12}{55} + \frac{72}{9240} = \frac{87}{385}$$



**لنحسب  $p_E(R)$**

$$p_E(R) = \frac{p(R \cap E)}{p(E)} = \frac{p_R(E) \times p(R)}{p(E)}$$

$$= \frac{p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)}{p(E)}$$

$$= \frac{\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}}{\frac{87}{385}} = \frac{1}{29}$$



لنحل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية :

$$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

لدينا :  $\Delta = 4(a-1)^2 - 8(a-1)^2$

$$= -4(a-1)^2$$

$$= (2i(a-1))^2$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين  $z_1$  و  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{2(a-1) + 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$$

$$z_2 = \frac{2(a-1) - 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$$



لدينا  $a = e^{i\theta}$  مع  $0 < \theta < \pi$  : إذن  $(a-1) = e^{i\theta} - 1$

$$(a-1) = e^{i\theta} - 1 = \cos \theta + i \sin \theta - 1 = \cos(\theta) - 1 + i \sin(\theta)$$

هدفنا هو البحث عن  $r$  و  $\varphi$  بحيث :  $(a-1) = r e^{i\varphi}$

يعني :  $\cos(\theta) - 1 + i \sin(\theta) = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi)$

أي :  $\begin{cases} \cos(\theta) - 1 = r \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) = r \sin(\varphi) \end{cases}$

من خلال دمج مربعي هاتين المتساويتين :

نجد :  $(\cos(\theta) - 1)^2 + \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$

**لنحسب :  $p[X = 3]$**

الحدث  $[X = 3]$  هو الحصول على ثلاث كرات سوداء و كرة حمراء واحدة . و من أجل ذلك لدينا :  
 $3^1$  إمكانية لسحب الكرة الحمراء .

$C_4^1$  إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة الحمراء .  
 $4^3$  إمكانية لسحب الكرات السوداء الثلاث .

$$p[X = 3] = \frac{3^1 \times C_4^1 \times 4^3}{7^4} = \frac{768}{2401} \text{ : إذن}$$

**لنحسب :  $p[X = 4]$**

الحدث  $[X = 4]$  هو الحصول على أربع كرات كلها سوداء .

$$p[X = 4] = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401} \text{ : إذن}$$

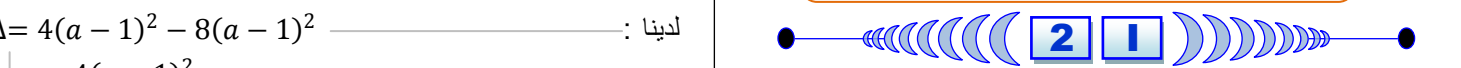
و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  هو التطبيق  $P_X$  المعروف بما يلي

$$P_X : \{0,1,2,3,4\} \mapsto [0,1]$$

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| 0 | $\mapsto P_X(0) = \frac{81}{2401}$  |
| 1 | $\mapsto P_X(1) = \frac{432}{2401}$ |
| 2 | $\mapsto P_X(2) = \frac{864}{2401}$ |
| 3 | $\mapsto P_X(3) = \frac{768}{2401}$ |
| 4 | $\mapsto P_X(4) = \frac{256}{2401}$ |

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نحصل على :

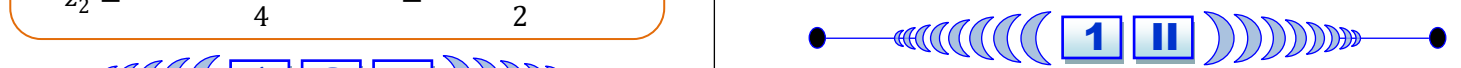
$$\frac{81}{2401} + \frac{432}{2401} + \frac{864}{2401} + \frac{768}{2401} + \frac{256}{2401} = 1$$



$$E(X) = \sum_{k=0}^4 k \cdot p[X = k]$$

$$= 0 \left( \frac{81}{2401} \right) + 1 \left( \frac{432}{2401} \right) + 2 \left( \frac{864}{2401} \right) + 3 \left( \frac{768}{2401} \right) + 4 \left( \frac{256}{2401} \right)$$

$$= \frac{5488}{2401} = \frac{16}{7}$$



لدينا :  $p(E \cap N) = p_N(E) \times p(N)$

و لدينا كذلك الحدث  $E$  هو الحصول على ثلاث كرات سوداء من خلال ثلاث سحب متتابعة بدون إحلال .

إذن نستطيع تجزئ الحدث  $E$  في المرحلة الثالثة إلى ثلاث أحداث جزئية و مستقلة فيما بينها و هي :

- $E_1$  : الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى
- $E_2$  : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية
- $E_3$  : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثالثة

إذن نكتب :  $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

و منه :  $p_N(E) = p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3)$

2

II

لدينا  $r_1$  دوران مركزه  $J$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

و لدينا  $r_1(C) = C'$  إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(C') - aff(J)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(C) - aff(J))$$

$$\Leftrightarrow \left( c' - \frac{a+i}{2} \right) = i \left( i - \frac{a+i}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{-1 - ia + a + i}{2} = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = z_2$$

و بنفس الطريقة لدينا  $r_2$  دوران مركزه  $K$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$

و لدينا  $r_2(A) = A'$  إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(A') - aff(K)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(A) - aff(K))$$

$$\Leftrightarrow \left( a' - \frac{a-i}{2} \right) = i \left( a - \frac{a-i}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{ia - 1 + a - i}{2} = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = z_1$$

إذن :  $c' = z_2$  و  $a' = z_1$

3

II

$$\frac{a' - c'}{a - 1} = \frac{\frac{(a-1)(i+1)}{2} - \frac{(a-1)(1-i)}{2}}{\frac{a-1}{1}} \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{(a-1)(i+1-1+i)}{2} \times \frac{1}{(a-1)}$$

$$= \frac{i(a-1)}{(a-1)} = i$$

$$\text{إذن : } \frac{a' - c'}{a - 1} = i \text{ و منه : } \arg\left(\frac{a' - c'}{a - 1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\text{يعني : } \arg(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{C'A'}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

و هذا يعني أن المستقيم  $(AB')$  عمودي على المستقيم  $(A'C')$ .  
أي أن المستقيم  $(AB')$  ارتفاع في المثلث  $A'B'C'$   
لأن  $B' \in (AB')$  و  $(A'C') \perp (AB')$ .

التمرين الرابع

1

I

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0^+)^2}} \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1 = f(0)$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

و هذا يعني أن الدالة  $f$  متصلة على يمين الصفر.  
لنحسب الآن نهاية  $f$  بجوار  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (+\infty)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{يعني : } \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1 + \sin^2 \theta = r^2$$

$$\text{يعني : } 2(1 - \cos \theta) = r^2$$

$$\text{يعني : } 2 \left( 1 - \left( 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - 1 \right) \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } 2 \left( 2 - 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } 4 \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } 4 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = r^2$$

$$\text{يعني : } r > 0 \text{ و } r = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

يكفي الآن تحديد قيمة  $\varphi$ . و نطلق من الكتابة  $\sin \theta = r \sin \varphi$

$$\text{يعني : } \sin \left( 2 \cdot \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin(\varphi)$$

$$\text{يعني : } 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin(\varphi)$$

$$\text{يعني : } \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = \sin(\varphi)$$

$$\text{يعني : } \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

$$\text{يعني : } \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{يعني : } \frac{\theta}{2} \equiv \varphi - \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{يعني : } \varphi \equiv \frac{\theta - \pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{إذن : } (a-1) = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i \left( \frac{\theta - \pi}{2} \right)}$$

2

I

ب

في البداية لدينا :

$$(1+i) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

و لدينا كذلك :

$$(1-i) = \sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{إذن : } z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cdot \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cdot \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

1

II

لدينا  $J$  هي منتصف القطعة  $[AC]$ .

$$\text{إذن : } aff(J) = \frac{aff(A) + aff(C)}{2} = \frac{a+i}{2}$$

و لدينا  $K$  هي منتصف القطعة  $[AB]$ .

$$\text{إذن : } aff(K) = \frac{aff(A) + aff(B)}{2} = \frac{a-i}{2}$$

لدينا :  $\psi(x) = x \ln x \in \left[ \frac{1}{e}, +\infty \right[ \subset \mathbb{R}$

إذن :  $\psi(]0, +\infty[) \subseteq \mathbb{R}$

إذن الدالة  $f = \varphi \circ \psi$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$ .

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0, +\infty[$ . لدينا :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

إذن :  $f'(x) = \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{1}{2}-1} (1 + (x \ln x)^2)'$

$$= \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{3}{2}} (2x \ln x)(x \ln x)'$$

$$= \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{3}{2}} (2x \ln x)(1 + \ln x)$$

$$= \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

إذن :  $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$

نلاحظ في البداية أن :  $(\forall x > 0) ; (1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}} > 0$

إذن إشارة  $f'(x)$  تتعلق بإشارتي الكميتين  $(\ln x)$  و  $(1 + \ln x)$ .  
الكمية  $\ln x$  تنعدم في 1 و الكمية  $1 + \ln x$  تنعدم في  $\frac{1}{e}$ .

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة  $f$  كما يلي :

| $x$         | 0 | $\frac{1}{e}$               | 1 | $+\infty$ |
|-------------|---|-----------------------------|---|-----------|
| $\ln x$     |   | -                           | 0 | +         |
| $1 + \ln x$ |   | -                           | 0 | +         |
| $f'(x)$     |   | -                           | 0 | +         |
| $f$         | 1 | $f\left(\frac{1}{e}\right)$ | 1 | 0         |

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\ln x} dx = \int \frac{(\ln x)'}{(\ln x)} dx$$

$$= \ln(|\ln x|) + c ; c \in \mathbb{R}$$

بما أن :  $x \in [e; +\infty[$  فإن  $\ln x \geq 1$

نأخذ الثابتة  $c$  تساوي 0 نجد أن الدالة  $x \rightarrow \ln(\ln x)$  دالة أصلية  
للدالة  $x \rightarrow \frac{1}{x \ln x}$  على المجال  $[e; +\infty[$ .

و أشير إلى أن  $x \rightarrow \ln(\ln x)$  دالة معرفة و متصلة على  $]1; +\infty[$   
إذن فهي متصلة على  $[e; +\infty[$  لأن :  $[e; +\infty[ \subset ]1; +\infty[$ .

## 1 ب

لدراسة اشتقاق الدالة  $f$  على اليمين في 0 نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

و من أجل ذلك نستعين بالنهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^2 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} - 1 \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{1 - \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right)$$

نضرب البسط و المقام في المرافق  $(1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})$  نجد :

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{1 - \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right) \left( \frac{1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{1 - 1 - (x \ln x)^2}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{-(x \ln x)^2}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x (\ln x)^2) \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= (-0) \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (0)^2} (1 + \sqrt{1 + (0)^2})} \right) = (0) \left( \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 0$$

و هذا يعني أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين الصفر و  $f'_d(0) = 0$ .

## 1 ج

**تذكير :** إذا كانت  $g$  دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و كانت  $f$  دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال  $J$ .

إذن تكون الدالة  $f \circ g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  إذا كان :  $g(I) \subseteq J$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \quad \text{لدينا :}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \text{نضع :}$$

و نضع :  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; \psi(x) = x \ln x$

إذن :  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; f(x) = \varphi \circ \psi(x)$

لدينا  $\psi$  دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$

و  $\varphi$  دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

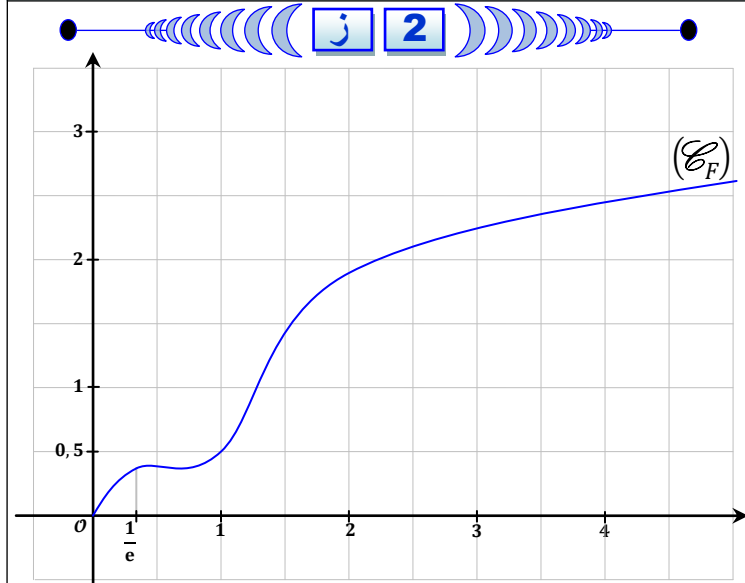
إذن تكون الدالة  $\psi \circ \varphi$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$

إذا كان :  $\psi(]0, +\infty[) \subseteq \mathbb{R}$

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0, +\infty[$ .







نستعمل النهاية :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$  لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - F(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{F(x)}{x}\right) = (+\infty)(1 - 0) = +\infty$$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$

من جهة ثانية لدينا  $\varphi$  معرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $\varphi(x) = x - F(x)$  ولدينا كذلك  $F$  قابلة للاشتقاق على  $[0, +\infty[$  بحيث :  $F'(x) = f(x)$

إذن  $\varphi$  دالة قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  ولدينا :  $\varphi'(x) = 1 - F'(x) = 1 - f(x)$  نلاحظ أنه إذا كان  $x = 0$  فإن  $f(x) = 1$  يعني :  $1 - f(x) = 0$  أي :  $\varphi'(x) = 0$

إذا كان  $0 \leq x \leq \frac{1}{e}$  فإن  $f(0) \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

لأن  $f$  دالة تناقصية على المجال  $\left[0, \frac{1}{e}\right]$  .  
إذن :  $1 \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

يعني :  $1 - f(x) \geq 0$  أي :  $\varphi'(x) \geq 0$  .  
إذن  $\varphi$  دالة تزايدية على المجال  $\left[0, \frac{1}{e}\right]$  .

إذا كان  $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$  فإن  $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(x) \leq f(1)$

لأن  $f$  دالة تزايدية على المجال  $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$  .

إذن  $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(x) \leq 1$  يعني :  $1 - f(x) \geq 0$  أي :  $\varphi'(x) \geq 0$

إذن  $\varphi$  دالة تزايدية على المجال  $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$  .

إذا كان  $x \geq 1$  فإن  $f(x) \leq f(1)$  .  
لأن  $f$  دالة تناقصية على المجال  $[1, +\infty[$  .

إذن :  $f(x) \leq 1$  يعني :  $1 - f(x) \geq 0$  أي :  $\varphi'(x) \geq 0$  .  
إذن  $\varphi$  دالة تزايدية على المجال  $[1, +\infty[$  .

خلاصة :  $\varphi$  دالة تزايدية قطعاً على المجال  $[0, +\infty[$

نستغل إذن هذه النهاية لحساب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( \int_0^e f(t) dt + \int_e^x f(t) dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( \int_0^e f(t) dt \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( \int_e^x f(t) dt \right) \\ &= \left( \frac{1}{+\infty} \right) \times (\text{constante réelle}) + 0 = 0 \end{aligned}$$

إذن :  $(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

و يمكن تفسير النهايتين (1) و (2) بقولنا : المنحنى  $(E_F)$  يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأفاصيل .



لدراسة نقط انعطاف المنحنى  $(E_F)$  ندرس إشارة المشتقة الثانية  $F''(x)$  .

لدينا  $F$  دالة عديدة معرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  .  
إذن  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $[0, +\infty[$  .

أو بتعبير الاشتقاق نكتب :  $F'(x) = f(x)$  ;  $\forall x \in [0, +\infty[$  .  
و بما أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  فإن الدالة  $F'$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  .

ولدينا :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; F''(x) = f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^2}$

إذن نتعدم الدالة  $F''(x)$  على المجال  $]0, +\infty[$  عندما نتعدم الكميئين  $(\ln x)$  و  $(1 + \ln x)$  .

أي نتعدم الدالة  $F''(x)$  إذا كان  $x = 1$  أو  $x = \frac{1}{e}$  .

و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطتين و ذلك حسب جدول الإشارة السابق .  
و بالتالي  $(E_F)$  يقبل نقطتي انعطاف أفصولا هما على التوالي  $\frac{1}{e}$  و 1 .



و يمكن أن نصيف جدول التغير للمنحنى  $(E_F)$  و ذلك انطلاقاً من جدول إشارة  $f'(x)$  .

لأن :  $\forall x \in ]0, +\infty[ ; F''(x) = f'(x)$

| $x$      | 0 | $\frac{1}{e}$ | 1 | $+\infty$   |   |
|----------|---|---------------|---|-------------|---|
| $F''(x)$ | - | 0             | + | 0           | - |
| $(E_F)$  |   | نقطة انعطاف   |   | نقطة انعطاف |   |



و منه :  $1 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n)$  (\*)

بما أن  $\alpha_n \geq n \geq 1$  فإن  $n \in [1; +\infty[$  و  $\alpha_n \in [1; +\infty[$   
لدينا  $\alpha_n \geq n$  إذن  $f(\alpha_n) \leq f(n)$  لأن  $f$  تناقصية على  $[1; +\infty[$   
إذن بالرجوع إلى التأطير (\*) نكتب :

$$0 < 1 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n) < f(n)$$

يعني :  $0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(n)$  (1)

في المرحلة الثانية نطبق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة  $F$  في  $[0; n]$   
إذن يوجد عنصر  $\varepsilon$  من  $]0; n[$  بحيث :

$$\frac{F(n) - F(0)}{n - 0} = F'(\varepsilon) = f(\varepsilon)$$

يعني :  $0 < \varepsilon < n$  و  $\frac{F(n)}{n} = f(\varepsilon)$

لدينا :  $0 < \varepsilon < n$  إذن :  $f(0) < f(\varepsilon) < f(n)$

يعني :  $1 < \frac{F(n)}{n} < f(n)$  أي :  $0 < 1 < \frac{F(n)}{n} < f(n)$

يعني :  $0 < \frac{F(n)}{n} < f(n)$  أي :  $-f(n) < \frac{-F(n)}{n} < 0$  (2)

نجمع التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$-f(n) < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < f(n)$$

ما يهمنا في هذا التأطير الغريب هو الشق الأيمن فقط .

أي :  $\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < f(n)$

الذي يصبح :  $\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$  (3)

و من التأطير (1) نستنتج أن :  $0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}$  (4)

إذن من (3) و (4) نستنتج أن :

$$(\forall n \geq 1) ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n) (*)$$

### 4 ب

نعلم حسب الأسئلة السابقة أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

إذن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F(n)}{n} + f(n) \right) = 0$

و منه فإن التأطير (\*) يُصبح :

$$(\forall n \geq 1) ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$$



### 3 ب

لدينا  $\varphi$  دالة متصلة و تزايدية قطاعا على المجال  $[0, +\infty[$  .

إذن  $\varphi$  تقابل من المجال  $[0, +\infty[$  نحو صورته  $\varphi([0, +\infty[)$  .

و لدينا :  $\varphi([0, +\infty[) = \left[ \varphi(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right[ = [0, +\infty[$

إذن  $\varphi$  تقابل من المجال  $[0, +\infty[$  نحو المجال  $[0, +\infty[$  .

و هذا يعني حسب تعريف التقابل :

$$(\forall y \in [0, +\infty[), (\exists ! x \in [0, +\infty[) ; \varphi(x) = y$$

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا .

إذن :  $n \in [0, +\infty[$  لأن  $n \in \mathbb{N} \subset [0, +\infty[$

إذن يوجد عنصر وحيد نرمز له بـ  $\alpha_n$  في المجال  $[0, +\infty[$

بحيث :  $\varphi(\alpha_n) = n$

أو بتعبير آخر : المعادلة  $\varphi(x) = n$  ذات المجهول  $x$  تقبل حلا وحيدا

و هو  $\alpha_n$  في المجال  $[0, +\infty[$  و ذلك كيفما كان  $n$  من  $\mathbb{N}$  .

أو بتعبير أخير :  $\varphi(\alpha_n) = n ; (\exists ! \alpha_n \geq 0) ; (\forall n \in \mathbb{N})$

### 3 ج

رأينا حسب السؤال ب) أن :  $\alpha_n \geq 0 ; (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن  $F(\alpha_n) \geq F(0)$  لأن  $F$  تزايدية على المجال  $[0, +\infty[$  .

يعني أن :  $F(\alpha_n) \geq 0 ; (\forall n \in \mathbb{N})$  (1)

و نعلم أن :  $\varphi(x) = x - F(x) ; (x \geq 0)$

إذن :  $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$  لأن  $\alpha_n \geq 0$

يعني :  $F(\alpha_n) = \alpha_n - \varphi(\alpha_n)$  (2)

بدمج (1) و (2) نحصل على :  $\alpha_n - \varphi(\alpha_n) \geq 0$

يعني :  $\alpha_n \geq \varphi(\alpha_n)$

و نعلم أن :  $\varphi(\alpha_n) = n ; (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن :  $\alpha_n \geq n ; (\forall n \in \mathbb{N})$

نلاحظ أن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$  إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_n \geq n$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$

### 4 ا

ليكن  $n \geq 1$  و  $n \in \mathbb{N}$  .

لدينا الدالة  $F$  متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$

بحيث :  $F'(x) = f(x) ; x \in [0, +\infty[$

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة  $F$  في أي مجال

محدود يوجد ضمن  $[0, +\infty[$  .

في المرحلة الأولى : نختار المجال  $[0; \alpha_n]$  .

لدينا  $[0; \alpha_n] \subset [0, +\infty[$  لأن  $\alpha_n \geq 0 ; (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن ، حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، يوجد عنصر  $c$  من المجال

$$]0; \alpha_n[ \text{ بحيث : } \frac{F(\alpha_n) - F(0)}{\alpha_n - 0} = F'(c) = f(c)$$

يعني :  $0 < c < \alpha_n$  و  $\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = f(c)$

لدينا :  $0 < c < \alpha_n$  إذن :  $f(0) < f(c) < f(\alpha_n)$

إذن بالرجوع إلى المتساوية (\*\*): نجد :

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \frac{1}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n+1)) - \ln(\arctan(n)) = \frac{1}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)) = \frac{-1}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم  $n^2$  نجد :

$$n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))] = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

$$v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

و باستعمال نتيجة السؤال (1) نجد :

خلاصة :

$$(\forall n \geq 1), (\exists c \in ]n; n+1[); v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$$



لدينا :  $n < c < n+1$

ندخل الدالة  $\arctan$  على هذا التأطير و علما أنها تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$  نجد :

$$(1) \arctan(n) < \arctan(c) < \arctan(n+1)$$

و لدينا كذلك :  $n < c < n+1$

$$(2) (1+n^2) < (1+c^2) < 1+(n+1)^2$$

نضرب التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$(1+n^2)\arctan(n) < (1+c^2)\arctan(c) < (1+(n+1)^2)\arctan(n+1)$$

ندخل على هذا التأطير دالة المقلوب نجد :

$$\frac{1}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)} < \frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)} < \frac{1}{(1+n^2)\arctan(n)}$$

و نضرب أطرف هذا التأطير في العدد السالب قطعا  $-n^2$  نجد :

$$\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)} < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$$

و نستغل بعد ذلك نتيجة السؤال (2) نجد :

$$\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$$

(\*)



و منه حسب مصاديق تقارب المتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0$$

من جهة أخرى نعلم أن :  $(\forall x \geq 0); \varphi(x) = x - F(x)$

لدينا  $\alpha_n \geq 0$  إذن  $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$

و نعلم كذلك أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}); \varphi(\alpha_n) = n$

إذن :  $F(\alpha_n) = \alpha_n - n$  يعني  $n = \alpha_n - F(\alpha_n)$

$$\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \frac{\alpha_n - n}{\alpha_n} = 1 - \frac{n}{\alpha_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{\alpha_n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n}\right) = 1 \text{ يعني } 0 = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = 1$$

التمرين الخامس

1

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا بحيث :  $n \geq 1$

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}\right)$$

$$= n^2 \ln\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)$$

$$= n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))]$$

2

نعتبر  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = \ln(\arctan(x))$

لدينا حسب الخاصيات العامة لاتصال مركب دالتين أن الدالة  $f$  متصلة

على  $]0; +\infty[$  و كذلك  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$

لأن دالة  $\ln$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و  $\arctan$  دالة قابلة

للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $]0; +\infty[ \subset \mathbb{R}$ .

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على الدالة  $f$  في أي مجال

محدود و يوجد ضمن  $]0; +\infty[$ .

ليكن  $n \geq 1$  و نختار المجال  $]n; n+1[$ .

إذن يوجد عدد حقيقي  $c$  من المجال  $]n; n+1[$  بحيث :

$$(**) \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c)$$

لدينا :  $(\forall x \in ]0; +\infty[); f(x) = \ln(\arctan(x))$

إذن :

$$f'(x) = \frac{(\arctan(x))'}{\arctan(x)} = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\arctan(x)} = \frac{1}{(1+x^2) \arctan(x)}$$



4

في البداية أذكركم بالنهايتين المهمتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = \frac{-\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{(1 + (n + 1)^2) \arctan(n + 1)} \text{ لدينا :}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-n^2}{n^2 + 2n + 2} \right) \left( \frac{1}{\arctan(n + 1)} \right)$$

$$= (-1) \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{-2}{\pi}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{(1 + n^2) \arctan(n)} \text{ ولدينا كذلك :}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-n^2}{n^2 + 1} \right) \left( \frac{1}{\arctan(n + 1)} \right)$$

$$= (-1) \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{-2}{\pi}$$

إذن التأطير (⊗) يُصبح :

$$\left( \frac{-n^2}{(1 + n^2) \arctan(n)} \right) < v_n < \left( \frac{-n^2}{(1 + (n + 1)^2) \arctan(n + 1)} \right)$$

$\swarrow \quad \searrow$   
 $n \rightarrow \infty \quad \quad \quad n \rightarrow \infty$   
 $\frac{-2}{\pi} \quad \quad \quad \frac{-2}{\pi}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \frac{-2}{\pi} \text{ إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نجد :}$$

$$u_n = e^{v_n} \text{ إذن } v_n = \ln(u_n) \text{ ولدينا}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{v_n} = e^{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right)} = e^{\left( \frac{-2}{\pi} \right)} \text{ ومنه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = e^{\left( \frac{-2}{\pi} \right)} \text{ وبالتالي :}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■