

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2016

- الموضوع -

ⵜⴰⵎⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵖⵔⴰⵏ
ⵜⴰⵎⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵖⵔⴰⵏ
ⵏ ⵍⵎⴰⵖⵔⴰⵏ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم
والامتحانات والتوجيه

NS 24



4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنى الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(7 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{C}), +, \cdot)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ جسم تبادلي.

لكل (x, y) من \mathbb{C}^2 ، نضع: $M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$ و $E = \{M(x, y); (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{C}), +)$ 0.5

2- تحقق أن: 0.5

$$M(x, y) \cdot M(x', y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$$

3- نضع $E^* = E - \{M(0, 0)\}$ ونعتبر التطبيق: $\mathbb{C}^2 \rightarrow E^*$: $(x, y) \mapsto z = x + iy$ بالمصفوفة

$M(x, y)$ من E ، حيث الزوج (x, y) من \mathbb{C}^2

(أ) بين أن z تشاكل من (\mathbb{C}^*, \cdot) نحو (E^*, \cdot) 0.25

(ب) استنتج أن (E^*, \cdot) زمرة تبادلية و أن عنصرها المحايد هو $M(1, 0)$ 0.75

4- بين أن $(E, +, \cdot)$ جسم تبادلي. 0.5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(أ) أحسب $A' \cdot M(x, y)$ من أجل $M(x, y)$ عنصر من E 0.5

(ب) استنتج أن كل عنصر من عناصر E لا يقبل ماثلا في $(M_3(\mathbb{C}), \cdot)$ 0.5

التمرين الثاني: (3 نقط)

الجزء الأول: ليكن (a, b) عنصرا من $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ بحيث العدد الأولي 173 يقسم $a^3 + b^3$

1- بين أن: $[173] \quad a^{171} \equiv -b^{171}$ (لاحظ أن: $171 = 3 \times 57$) 0.25

2- بين أن: 173 يقسم a إذا و فقط إذا كان 173 يقسم b 0.25

3- نفترض أن 173 يقسم a . بين أن 173 يقسم $a + b$ 0.25

4- نفترض أن 173 لا يقسم a

(أ) باستعمال ميرهنة فيرما بين أن: $[173] \quad a^{172} \equiv b^{172}$ 0.5

(ب) بين أن: $[173] \quad a^{171}(a + b) \equiv 0$ 0.5

(ج) استنتج أن 173 يقسم $a + b$ 0.5

الجزء الثاني: نعتبر في $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ المعادلة التالية: $(E) \quad x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$

ليكن (x, y) عنصرا من $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ حلا للمعادلة (E) ؛ نضع: $x + y = 173k$ ، حيث $k \in \mathbb{R}^*$

1- تحقق أن: $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$ 0.25

2- بين أن: $k = 1$ ثم حل المعادلة (E) . 0.5

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و موجه (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر نقطتين M_1 و M_2 من المستوى العقدي بحيث النقط O و M_1 و M_2 مختلفة مثنى مثنى و غير مستقيمة.

ليكن z_1 و z_2 لحقي M_1 و M_2 على التوالي و لتكن M النقطة التي لحقها z يحقق العلاقة: $z = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$

1- (أ) بين أن: $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$ 0.5

(ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2 0.5

2- بين أنه إذا كانت $z_2 = \overline{z_1}$ فإن M تنتمي إلى المحور الحقيقي. 0.5

3- نفترض أن M_2 هي صورة M_1 بالدوران r الذي مركزه O و قياس زاويته α حيث α ينتمي إلى $]0, \pi[$

(أ) احسب z_2 بدلالة z_1 و α 0.5

(ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى واسط القطعة $[M_1M_2]$ 0.5

4- ليكن θ عددا حقيقيا معلوما من $]0, \pi[$

نفترض أن z_1 و z_2 هما حلا للمعادلة: $6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$

(أ) بدون حساب z_1 و z_2 تحقق أن: $z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$ 0.5

(ب) أعط الصيغة المثلثية للعدد العقدي z بدلالة θ . 0.5

التمرين الرابع: (7 نقط)

الجزء الأول:

1- بتطبيق مبرهنة التزايد المتناهية على الدالة $t \mapsto e^{-t}$ ، بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعاً x يوجد عدد حقيقي

θ محصور بين 0 و x بحيث: $e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}}$ 0.5

2- استنتج أن:

(أ) $1 - x < e^{-x}$; $(x > 0)$ 0.25

(ب) $x + 1 < e^x$; $(x > 0)$ 0.25

(ج) $0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$; $(\forall x > 0)$ 0.25

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $f(0) = 1$ و $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$ إذا كان $x > 0$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

0.5 1- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0

0.5 ب) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.25 2- أ) بين أن: $x - \frac{x^2}{2} \leq e^{-x} + 1$ (" $x^3 > 0$) (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- أ) من الجزء الأول)

0.5 ب) استنتج أن: $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$ (" $x^3 > 0$)

0.5 3- أ) تحقق أن: $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$ (" $x > 0$)

0.75 ب) استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}$ ثم أول النتيجة المحصل عليها.

0.75 4- أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ وأن $f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$ (" $x > 0$)

0.5 ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $[0, +\infty[$. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- ب) من الجزء الأول)

الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 > 0$ و $u_{n+1} = \ln(f(u_n))$ لكل عدد صحيح طبيعي n

0.5 1- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا: $u_n > 0$

0.5 2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- ج) من الجزء الأول)

0.5 3- بين أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة: $\ln(f(x)) = x$ ثم حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

التمرين الخامس: (3 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي: $F(x) = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$

0.5 1- أ) أدرس إشارة $F(x)$ لكل x من I

0.5 ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I و احسب $F'(x)$ لكل x من I .

0.25 ج) بين أن الدالة F تزايدية قطعا على المجال I

0.5 2- أ) باستعمال تقنية تغيير المتغير و ذلك بوضع: $u = \sqrt{e^t - 1}$ ، بين أنه لكل x من I لدينا:

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$

0.5 ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$

0.25 3- أ) بين أن الدالة F تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده.

0.5 ب) حدد التقابل العكسي F^{-1} للتقابل F .

انتهى

Gassine Mghazli

التمرين الاول

$$-1 \quad (0_{M_3(\mathbb{R})} = M(0,0) \in E \text{ لأن } E \neq \emptyset \text{ و } E \subset M_3(\mathbb{R}))$$

$$\text{ولدينا } (\forall (M(x,y), M(a,b)) \in E^2); M(x,y) - M(a,b) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x-a)+(y-b) & 0 & -2(y-b) \\ 0 & 0 & 0 \\ y-b & 0 & (x-a)-(y-b) \end{pmatrix}$$

$$= M(x-a, y-b) \in E$$

إذن

$$E \text{ زمرة جزئية للزمرة } (M_3(\mathbb{R}), +)$$

-2 لدينا

$$(\forall (M(x,y), M(x',y')) \in E^2); M(x,y) \times M(x',y') = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') - 2yy' & 0 & -2y'(x+y) - 2y(x'-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y(x'+y') + y'(x-y) & 0 & -2yy' + (x-y)(x'-y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' + xy' + yx' - yy' & 0 & -2(xy' + yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ xy' + yx' & 0 & xx' - yy' - xy' - yx' \end{pmatrix}$$

$$= M(xx' - yy', xy' + yx')$$

إذن

$$(\forall (M(x,y), M(x',y')) \in E^2); M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$$

Ghassine Mghazli

$$(\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2); \exists! ((x, y), (x', y') \in (\mathbb{R} - \{(0, 0)\})^2) / z = x + iy \text{ و } z' = x' + iy' \quad (3 - \text{أ})$$

$$\varphi(z \times z') = \varphi((x + iy)(x' + iy')) \quad \text{لدينا}$$

$$= \varphi(xx' - yy' + i(xy' + yx'))$$

$$= M(xx' - yy', xy' + yx')$$

$$= M(x, y) \times M(x', y')$$

$$= \varphi(z) \times \varphi(z')$$

إذن

$$(\varphi(\mathbb{C}^*), \times) \text{ تشاكل من } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ نحو } (E, \times)$$

(ب) بما أن زمرة تبادلية عنصرها المحايد 1 و φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E, \times)

فإن زمرة تبادلية عنصرها المحايد $\varphi(1)$ و بما أن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ و $\varphi(1) = \varphi(1 + 0i) = M(1, 0)$

فإن

$$(E^*, \times) \text{ زمرة تبادلية عنصرها المحايد } M(1, 0)$$

4- لدينا (E^*, \times) زمرة تبادلية و E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}), +)$ إذن $(E, +)$ زمرة تبادلية

ولدينا حسب السؤال 2- E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ إذن \times توزيعي على $+$ في E

نستنتج أن

$$(E, +, \times) \text{ جسم تبادلي}$$

$$(\forall M(x, y) \in E); A \times M(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5 - \text{أ}) \text{ لدينا}$$

$$(\forall M(x, y) \in E); A \times M(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ghassine Mghazli

ب) نفترض أن ل $M(x, y)$ مماثلا في $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ هو M^{-1}

$$A \times M(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \times M(x, y)) \times M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M^{-1}$$

$$\Rightarrow A \times (M(x, y) \times M^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وهذا تناقض ومنه

جميع عناصر E لا تقبل مقلوبا في $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

التمرين الثاني

الجزء الاول

1- لدينا $a^3 + b^3 \equiv 0 [173] \Leftrightarrow a^3 + b^3 \equiv 0 [173] \Leftrightarrow 173 | a^3 + b^3$ إذن $a^3 \equiv -b^3 [173]$ ومنه $(a^3)^{57} \equiv (-b^3)^{57} [173]$

و بالتالي

$$a^{171} \equiv -b^{171} [173]$$

2- لدينا 173 أولي و $173 | a$ إذن $(173 | a^3 \Leftrightarrow 173 | a)$ و $(173 | b^3 \Leftrightarrow 173 | b)$

و بما أن $173 | a^3 + b^3$ فإن $173 | b^3$ $(173 | a^3 \Leftrightarrow 173 | b^3)$

نستنتج أن

$$173 | a \Leftrightarrow 173 | b$$

3- لدينا $(173 | a \Rightarrow 173 | b)$ و $(173 | a)$ ومنه $(173 | a$ و $173 | b)$

$$173 | a + b$$

نستنتج أن

4- أ) لدينا 173 لا يقسم a إذن حسب 2- لا يقسم b ومنه حسب مبرهنة فرما الصغرى $a^{172} \equiv 1 [173]$ و $b^{172} \equiv 1 [173]$

نستنتج أن

$$a^{172} \equiv b^{172} [173]$$

ب) لدينا $a^{171} \equiv -b^{171} [173]$ و $a^{172} \equiv b^{172} [173]$ إذن $a^{172} \equiv -ba^{171} [173]$ ومنه

$$a^{171}(a+b) \equiv 0 [173]$$

ج) بما أن 173 لا يقسم a فإن 173 لا يقسم a^{171} و بما أن $173 \wedge a^{171} = 1$ فإن أولي a^{171} و بما أن $173 | a^{171}(a+b)$

فإن حسب مبرهنة كوص

$$173 | a + b$$

Ghassine Mghazli

الجزء الثاني

1- لكل x و y و k من \mathbb{N}^* لدينا :

$$\begin{cases} x + y = 173k \\ x^3 + y^3 = 173(xy + 1) \end{cases} \Rightarrow (x^2 - xy + y^2)173k = 173(xy + 1)$$

$$\Rightarrow k((x - y)^2 + xy) = (xy + 1)$$

$$\Rightarrow k(x - y)^2 = 1 + xy(1 - k)$$

$$\Rightarrow k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$$

إذن

$$k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$$

2- نفترض أن $k \neq 1$ حسب السؤال السابق لدينا $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$

$$\text{إذن } (*)k(x - y)^2 = 1 - (k - 1)xy$$

وبما أن x و y و k من \mathbb{N}^* فإن $k \geq 2$ و $xy \geq 1$ و منه $(k - 1)xy \geq 1$ ما يستلزم أن $k(x - y)^2 \leq 0$

أي أن $x = y$ المعادلة (*) تصبح $(k - 1)xy = 1$ ما يستلزم أن $k - 1 = x = y = 1$ و هذا تناقض مع كون

$k = 1$: الصحيح هو عكسه هو الخاطئ إذن الافتراض الأول خاطئ وعكسه هو الصحيح: $k = 1$

$$(E) \Rightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 1 \\ x + y = 173 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x - y) = 1 \\ x + y = 173 \end{array} \right. \text{ أو } \left\{ \begin{array}{l} (x - y) = -1 \\ x + y = 173 \end{array} \right. \quad \text{لدينا}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 174 \\ 2y = 172 \end{array} \right. \text{ أو } \left\{ \begin{array}{l} 2x = 172 \\ 2y = 174 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 87 \\ y = 86 \end{array} \right. \text{ أو } \left\{ \begin{array}{l} x = 86 \\ y = 87 \end{array} \right.$$

$$87^3 + 86^3 = (86 + 87)(87^2 - 87 \times 86 + 86^2) = 173(87 + 86^2) = 173(1 + 86 \times 87)$$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي إذن

$$S = \{(87, 86); (86, 87)\}$$

Gassine Mghazli

التمرين الثالث

$$\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1 z_2 - z z_2}{z_1 z_2 - z z_1} = \frac{\frac{1}{2}(z(z_1 + z_2) - 2z z_2)}{\frac{1}{2}(z(z_1 + z_2) - 2z z_1)} = \frac{z(z_1 - z_2)}{z(z_2 - z_1)} = -1 \text{ لدينا (أ)}$$

إذن

$$\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$$

(ب) بما أن النقط O و M و M_1 و M_2 غير مستقيمية و $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2 - 0}{z_1 - 0} \in \mathbb{R}$ فإنها نقط متداورة ومنه

النقطة M تنتمي للدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2

$$-2 \text{ لدينا } z = \frac{2z_2 z_1}{z_2 + z_1} = \frac{2z_2 \bar{z}_2}{z_2 + z_2} = \frac{2z_1 \bar{z}_1}{z_1 + z_1} = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2} = \bar{z} \text{ لأن } (z_2 = \bar{z}_1, z_1 = \bar{z}_2)$$

إذن $\bar{z} = z$ ومنه $z \in \mathbb{R}$ نستنتج أن

M تنتمي للمحور الحقيقي

-3 (أ) الصيغة العقدية الدوران الذي مركزه O وزاويته α هي: $z' = e^{i\alpha} z$ وبما أن صورة M_1 بهذا الدوران هي M_2 فإن

$$z_2 = e^{i\alpha} z_1$$

(ب) بما أن z_1 و z_2 مترافقين فإن M_1 و M_2 ممتثلين بالنسبة للمحور الحقيقي و منه منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ينتمي للمحور الحقيقي

و بما أن $OM_1 = OM_2$ فإن واسط القطعة $[M_1M_2]$ هو المحور الحقيقي نستنتج حسب السؤال 2- أن

M تنتمي لواسط القطعة $[M_1M_2]$

$$-4 \text{ (أ) } z_1 \text{ و } z_2 \text{ حلي المعادلة } 6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0 \text{ إذن } z_1 + z_2 = \frac{e^{i\theta} + 1}{6} \text{ و } z_1 z_2 = \frac{e^{i\theta} - 1}{6}$$

$$z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} \text{ : منه و } z = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2} = 2 \frac{\frac{e^{i\theta} - 1}{6}}{\frac{e^{i\theta} + 1}{6}} = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$$

Gassine Mghazli

$$z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = 2 \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)} = 2 \frac{2i \sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = 2i \tan \frac{\theta}{2} \text{ لدينا (ب)}$$

وبما أن $\theta \in]0, \pi[$ فإن $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ و $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{4}[$ منه $\tan \frac{\theta}{2} > 0$ نستنتج أن الشكل المثلثي ل z هو

$$z = \left[2 \tan \frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

التمرين الرابع

الجزء الأول

1- لكل x من $]0, +\infty[$ الدالة $\varphi: t \rightarrow e^{-t}$ متصلة على $[0, x]$ و قابلة للاشتقاق على $]0, x[$ إذن حسب ميرهنة التزايديات المنتهية

يوجد θ من $]0, x[$ بحيث $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(\theta)$ وبالتعويض نحصل على $\frac{e^{-x} - 1}{x} = -e^{-\theta}$ ومنه $\frac{x}{1 - e^{-x}} = e^{\theta}$

$$(\forall x \in]0, +\infty[); (\exists \theta \in]0, x[) / e^{\theta} = \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

2- (أ) و (ب) لدينا $(\forall x > 0); 0 < \theta < x \Rightarrow 1 < e^{\theta} < e^x \Rightarrow 1 < \frac{x}{1 - e^{-x}} < e^x$

$$\begin{aligned} & \stackrel{(1 - e^{-x} > 0)}{\Rightarrow} 1 - e^{-x} < x < e^x (1 - e^{-x}) \\ & \Rightarrow \begin{cases} 1 - e^{-x} < x \\ x < e^x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x < e^{-x} \\ x + 1 < e^x \end{cases} \end{aligned}$$

إذن

$$(\forall x > 0); x + 1 < e^x \text{ و } (\forall x > 0); 1 - x < e^{-x}$$

(ج) لدينا $(\forall x > 0); 0 < \theta < x \Rightarrow 1 < e^{\theta} < e^x \Rightarrow 1 < \frac{x}{1 - e^{-x}} < e^x$

$$\Rightarrow 1 < \frac{xe^x}{e^x - 1} < e^x \Rightarrow 0 < \ln \left(\frac{xe^x}{e^x - 1} \right) < x$$

(لأن الدالة \ln تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$) و منه

$$(\forall x > 0); 0 < \ln \left(\frac{xe^x}{e^x - 1} \right) < x$$

Gassine Mghazli

الجزء الثاني

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 1 \times \frac{1}{1} = 1 = f(1) \text{ لدينا (أ) -1}$$

إذن f متصلة على اليمين في 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 0 \text{ لدينا (ب)}$$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$ ومنه ل (C) مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$

$$-2 \text{ (أ) لدينا حسب (أ-2) من الجزء الأول: } (\forall t > 0); 1 - t < e^{-t} \text{ إذن } (\forall t \geq 0); 1 - t \leq e^{-t}$$

$$\text{إذن } (\forall x \geq 0); \int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x e^{-t} dt$$

$$\text{يستازم } (\forall x \geq 0); \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x \leq \left[-e^{-t} \right]_0^x$$

ومنه

$$(\forall x \geq 0); x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1$$

$$(\forall x \geq 0); x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1 \Rightarrow (\forall x \geq 0); \begin{cases} e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2} \\ \int_0^x t - \frac{t^2}{2} dt \leq \int_0^x (-e^{-t} + 1) dt \end{cases} \text{ لدينا (ب)}$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0); \begin{cases} e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2} \\ \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right]_0^x \leq \left[e^{-t} + t \right]_0^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0); \begin{cases} e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \end{cases}$$

Gassine Mghazli

ومنه

$$(\forall x > 0); \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} (\forall x > 0); \frac{f(x)-1}{x} &= \frac{xe^x - 1}{e^x - 1} && \text{3- أ) لدينا} \\ &= \frac{xe^x - e^x - 1}{x(e^x - 1)} \\ &= \frac{x}{x^2(e^x - 1)} \times e^x(x-1-e^{-x}) \\ &= \frac{f(x)}{x^2}(x-1-e^{-x}) \end{aligned}$$

إذن

$$(\forall x > 0); \frac{f(x)-1}{x} = \frac{x-1-e^{-x}}{x^2} f(x)$$

$$\begin{aligned} (\forall x > 0); \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2} &\Rightarrow (\forall x > 0); \frac{1}{2} - \frac{x}{6} \leq \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \leq \frac{1}{2} && \text{ب) لدينا} \\ &\Rightarrow (\forall x > 0); \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{6}\right) f(x) \leq \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} f(x) \leq \frac{1}{2} f(x) \\ &\Rightarrow (\forall x > 0); \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{6}\right) f(x) \leq \frac{f(x)-1}{x} \leq \frac{1}{2} f(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{6}\right) f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2} f(0) = \frac{1}{2}$$

فإن

$$f'_d(0) = \frac{1}{2} \text{ و } 0 \text{ قابلة للاشتقاق على اليمين في } 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{2}$$

4- أ) الدوال $x \rightarrow x$ و $x \rightarrow e^x$ و $x \rightarrow 1$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وبالخصوص على $]0, +\infty[$ إذن الدالتين $x \rightarrow xe^x$

$x \rightarrow e^x - 1$ قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و بما أن $e^x - 1 \neq 0$

فإن الدالة $x \rightarrow \frac{xe^x}{e^x - 1}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

Gassine Mghazli

خلاصة

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}(\forall x > 0); f'(x) &= \frac{(e^x + xe^x)(e^x - 1) - xe^x e^x}{(e^x - 1)^2} && \text{لدينا} \\ &= \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} ((x+1)(e^x - 1) - xe^x) \\ &= \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} (xe^x - x + e^x - 1 - xe^x) \\ &= \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} (e^x - x - 1)\end{aligned}$$

إذن

$$(\forall x > 0); f'(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} (e^x - x - 1)$$

(ب) حسب السؤال 2- (ب) من الجزء الأول لدينا $x+1 < e^x$ ($\forall x > 0$);
إذن $e^x - x - 1 > 0$ و $f'(x) > 0$ منه ($\forall x > 0$);

نستنتج أن الدالة f تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

الجزء الثالث

1- برهان بالترجع على العلاقة " $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$ "

لدينا $u_0 > 0$ إذن العلاقة صحيحة من أجل $n = 0$

ليكن $n \in \mathbb{N}$ نفترض أن $u_n > 0$ و نبين أن $u_{n+1} > 0$

$$n \in \mathbb{N}; u_n > 0 \Rightarrow f(u_n) > f(0) \Rightarrow \ln(f(u_n)) > \ln(f(0))$$

(

و بما أن $\ln(f(0)) = \ln(1) = 0$ فإن $u_{n+1} > 0$

حسب مبدأ التراجع نستنتج أن

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$$

Gassine Mghazli

$$2- \text{ لدينا حسب السؤال 2- ج) } (\forall x > 0); 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) < x$$

$$\text{وبما أن } (\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0 \text{ فإن } (\forall n \in \mathbb{N}); 0 < \ln\left(\frac{u_n e^{u_n}}{e^{u_n}-1}\right) < u_n$$

$$\text{نستنتج أن } (\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_{n+1} < u_n \text{ وبالتالي } (\forall n \in \mathbb{N}); 0 < \ln(f(u_n)) < u_n$$

إذن

المتتالية (u_n) تناقصية قطعا و بما أنها مصغرة ب 0 فهي إذن متقاربة

$$3- \text{ لدينا } (\forall x > 0); e^x > x+1 \Leftrightarrow e^x - 1 > x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{xe^x}{e^x-1} < e^x \Leftrightarrow f(x) < e^x \Leftrightarrow \ln(f(x)) < x$$

$$\text{و } \ln(f(0)) = 0$$

$$\text{إذن } \begin{cases} (\forall x > 0); \ln(f(x)) \neq x \\ \ln(f(0)) = 0 \end{cases} \text{ و منه}$$

$$0 \text{ هو الحل الوحيد للمعادلة } \ln(f(x)) = x$$

المتتالية (u_n) متقاربة و الدالة $\ln \circ f$ متصلة على $]0, +\infty[$ وتحقق $\ln \circ f (]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$ إذن نهايتها l تحقق المعادلة $\ln(f(l)) = l$ التي تقبل حلا وحيدا هو 0 نستنتج أن

$$\lim u_n = 0$$

التمرين الخامس

$$1- أ) \text{ لدينا } (\forall t \in]0, +\infty[); \frac{1}{\sqrt{e^t-1}} > 0$$

$$\text{إذن } (\forall x \in]0, \ln 2[); \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t-1}} dt < 0 \text{ و } (\forall x \in]\ln 2, +\infty[); \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t-1}} dt > 0$$

و منه إشارة $F(x)$ كما يلي

$$F(x) \text{ موجبة قطعا على المجال }]\ln 2, +\infty[$$

$$F(x) \text{ سالبة قطعا على المجال }]0, \ln 2[\text{ و } F(\ln 2) = 0$$

Gassine Mghazli

(ب) الدالة F هي أصلية الدالة $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ على $]0, +\infty[$ و التي تتعدم عند $\ln 2$

إذن F قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و لدينا

$$(\forall x \in]0, +\infty[); F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$$

(ج) لدينا $(\forall x \in]0, +\infty[); F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} > 0$ إذن

الدالة F تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

$$\begin{cases} du = \frac{e^t}{2u} dt = \frac{u^2+1}{2u} dt \Leftrightarrow dt = \frac{2u}{u^2+1} du \\ t = x \Leftrightarrow u = \sqrt{e^x-1} \\ t = \ln 2 \Leftrightarrow u = 1 \end{cases} \quad \text{-2 (أ) بوضع } u = \sqrt{e^t-1} \text{ يكون لدينا}$$

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t-1}} dt = \int_1^{\sqrt{e^x-1}} \frac{1}{u} \frac{2u}{u^2+1} du = \int_1^{\sqrt{e^x-1}} \frac{2}{u^2+1} du \quad \text{ومنه}$$

$$= 2[\arctan]_1^{\sqrt{e^x-1}} = 2\left(\arctan(\sqrt{e^x-1}) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\arctan(\sqrt{e^x-1}) - \frac{\pi}{2}$$

إذن

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t-1}} dt = 2\arctan(\sqrt{e^x-1}) - \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\arctan(\sqrt{e^x-1}) - \frac{\pi}{2} = 2\arctan(0) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ب) لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\arctan(\sqrt{e^x-1}) - \frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{و}$$

Gassine Mghazli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\frac{\pi}{2}$$

3- أ) F قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ إذن متصلة عليه و بما أنها تزايدية قطعا على $]0, +\infty[$

فهي إذن تقابل من $]0, +\infty[$ نحو $]0, +\infty[$

$$\text{و لدينا } F(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right[= \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

إذن

$$F \text{ تقابل من }]0, +\infty[\text{ نحو } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$(\forall y \in]0, +\infty[); \left(\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) F(y) = x \Leftrightarrow 2 \arctan(\sqrt{e^y - 1}) - \frac{\pi}{2} = x \quad (\text{ب})$$

$$\Leftrightarrow \arctan(\sqrt{e^y - 1}) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^y - 1} = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^y = 1 + \tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \ln\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

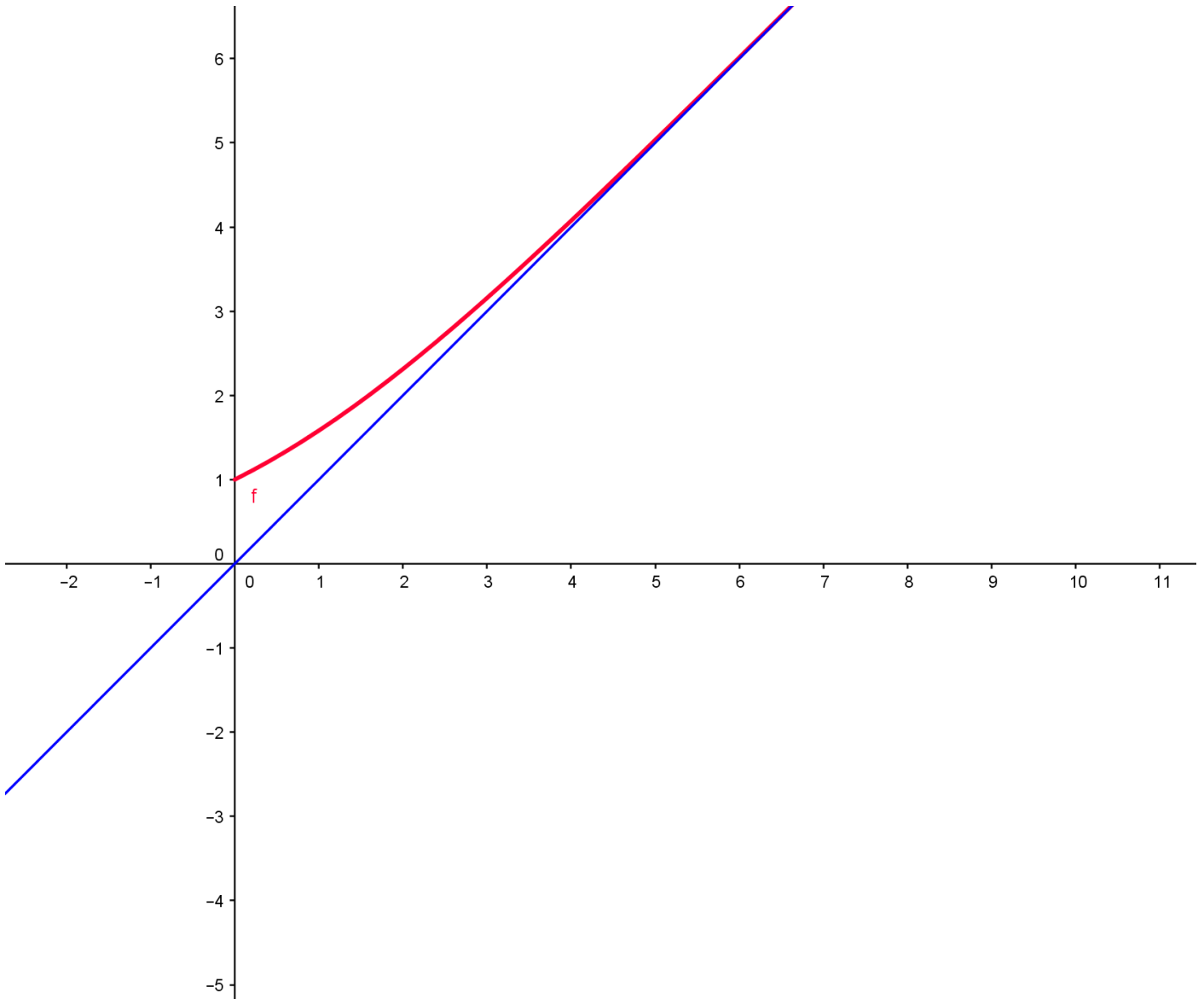
ومنه

$$F \text{ تقابل من }]0, +\infty[\text{ نحو } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ و } F^{-1}(x) = \ln\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \text{ ; } \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

Gassine Mghazli

إضافة

مبيان الدالة f



Ghassine Mghazli

مبيان الدالة F

