

الثانية علوم رياضية الوطني الاستدراكي 2017

التمرين 1 : 4,5 ن

نذكر أن $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي وأن $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي وأن $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة غير تبادلية و غير كاملة .

نضع : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $M_{x,y} = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$ لكل x, y من \mathbb{R}^2

و $E = \{ M_{x,y} / x, y \in \mathbb{R}^2 \}$

1. بين أن E فضاء متجهي جزئي من $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ بعده 2 0,75

2. (أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ 0,5

(ب) بين أن $(E, +, \times)$ حلقة واحدة و تبادلية 0,75

3. نضع $E^* = E \setminus \{0\}$ و نعتبر التطبيق φ من \mathbb{C}^* نحو E^* المعرف بما يلي :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x+iy) = M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

(أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E^*, \times) 0,75

(ب) استنتج أن (E^*, \times) زمرة تبادلية . 0,5

(ج) بين أن : $J^{2017} = \varphi(3^{1008}\sqrt{3}i)$ ثم حدد مقلوب المصفوفة J^{2017} في (E^*, \times) 0,75

4. بين أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي. 0,5

التمرين 2 : 3 ن

يحتوي كيس على $2n$ كرة (n من \mathbb{N}^*) ، منها n كرة بيضاء و n كرة سوداء. جميع الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس.

تقتضي لعبة سحب كرة واحدة من الكيس و تسجيل لونها و إعادتها إلى الكيس ثم سحب كرة أخرى من نفس الكيس و تسجيل لونها كذلك .

قانون اللعبة هو كما يلي :

- إذا كان لون الكرتين المسحوبتين أبيض ، نربح 20 نقطة

- إذا كان لون الكرتين المسحوبتين أسود ، نخسر 20 نقطة

- إذا كانت الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون ، يكون الربح منعدم .

1. أحسب احتمال ربح 20 نقطة و احتمال خسارة 20 نقطة و احتمال تحقيق ربح منعدم 0,75

2. نعيد اللعبة السابقة خمس مرات

(أ) أحسب احتمال ربح 100 نقطة 0,5

(ب) أحسب احتمال ربح 40 نقطة 1

3. خلال لعبة واحدة ، نعتبر المتغير العشوائي X الذي يأخذ فقط القيم -20 عند الخسارة و 0 عندما يكون

الربح منعدما و +20 عند الربح	
(أ) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X	0,5
(ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X	0,25

التمرين 3 : 2,5 ن

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر O, \vec{e}_1, \vec{e}_2	
لتكن M نقطة لحقها العدد العقدي غير المنعدم z و M' النقطة التي لحقها $z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$	
1. حدد العدد العقدي z لكي تكون النقطتان M و M' منطبقتين .	0,5
2. نفترض أن M تخالف النقطتين A و B لحقيهما على التوالي 1 و -1	
بين أن : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$	0,5
3. ليكن Δ واسط القطعة AB	
بين أن : إذا كانت M تنتمي إلى Δ فإن M' تنتمي إلى Δ	0,75
4. لتكن Γ الدائرة التي أحد أقطارها AB	
بين أن : إذا كانت M تنتمي إلى Γ فإن M' تنتمي إلى المستقيم AB	0,75

التمرين 4 : 10 ن

الجزء الأول :	
لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = 0, +\infty$ بما يلي :	
$\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) = \frac{\text{Arc tan } x}{x}$ و $f(0) = 1$	
1. بين أن f متصلة على المجال I	0,5
2. (أ) ليكن x من I بين أن : $\forall t \in 0, x \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$	0,5
(ب) بين أن : $\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arc tan } x \leq x$	0,5
(ج) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,75
3. (أ) علما أن f قابلة للاشتقاق على المجال $0, +\infty$ ، أحسب $f'(x)$ لكل x من $0, +\infty$	0,5
(ب) أدرس تغيرات الدالة f على المجال I	0,25

الجزء الثاني :

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $I = 0, +\infty$ بما يلي :	
$\forall x \in 0, +\infty \quad g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ و $g(0) = 1$	
1. (أ) بين أن : $\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) \leq g(x) \leq 1$	0,5
(ب) بين g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,75

2. بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $0, +\infty$	0,75
و أن $\forall x \in 0, +\infty \quad g' x = \frac{1}{x} f x - g x$	
3. بين أن الدالة g تناقصية على المجال I	0,25
4. (أ) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f t dt = 0$ (لاحظ أن : $0 < \text{Arctan } x < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in 0, +\infty$)	0,75
(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g x$	0,5

<u>الجزء الثالث :</u>	
1. بين أن المعادلة $g x = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $0,1$	0,75
2. (أ) تحقق أن : $\forall x \in 0, +\infty \quad 0 \leq 1 - f x \leq \frac{x^2}{1+x^2}$	0,5
(ب) بين أن $\forall x \in 0, +\infty \quad g' x \leq \frac{1}{2}$	0,75
3. لتكن u_n المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 \in \mathbb{R}^+$ و $u_{n+1} = g u_n$ لكل n من \mathbb{N}	0,75
(أ) بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2} u_n - \alpha $	0,75
(ب) بين أن المتتالية u_n متقاربة	0,75

تصحيح التمرين الأول

.1

✓ لدينا : $E \subset M_2 \mathbb{R}$

و $E \neq \emptyset$ ($I = M_{1,0}$ لأن $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$)

لتكن $M_{x,y}$ و $M_{a,b}$ من E وليكن α و β من \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \alpha M_{a,b} + \beta M_{x,y} &= \alpha \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta x & -3\alpha b + \beta y \\ \alpha b + \beta y & \alpha a + \beta x \end{pmatrix} \\ &= M_{\alpha a + \beta x, \alpha b + \beta y} \in E \end{aligned}$$

$$\alpha a + \beta x, \alpha b + \beta y \in \mathbb{R}^2$$

إذن : E فضاء متجهي جزئي من $M_2 \mathbb{R}, +, \cdot$

✓

• لتكن $M_{x,y}$ من E

$$\begin{aligned} M_{x,y} &= \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= x.I + y.J \end{aligned}$$

إذن I, J أسرة مولدة للفضاء E

• ليكن α و β من \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \alpha.I + \beta.J = O &\Rightarrow M_{\alpha, \beta} = O \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن I, J أسرة حرة للفضاء E

وبالتالي I, J أساس للفضاء E
و منه $\dim E = \text{card } I, J = 2$

2. أ) لنبين أن E جزء مستقر من $\mathbb{R}, \times M_2$

لدينا : $E \neq \emptyset$ و $E \subset M_2 \mathbb{R}$

لتكن $M x, y$ و $M a, b$ من E

$$\begin{aligned} M a, b \times M x, y &= \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax - 3by & -3ay - 3bx \\ bx + ay & -3by + ax \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax - 3by & -3ay + bx \\ ay + bx & ax - 3by \end{pmatrix} \\ &= M ax - 3by, ay + bx \in E \end{aligned}$$

$$ax - 3by, ay + bx \in \mathbb{R}^2$$

إذن E جزء مستقر من $\mathbb{R}, \times M_2$

ب) لنبين أن $E, +, \times$ حلقة واحدة وتبادلية

❖

✓ $E, +$ زمرة تبادلية (لأن $E, +, \cdot$ فضاء متجهي)

✓ بما أن E جزء مستقر من $\mathbb{R}, \times M_2$ و \times تجميعي و توزيعي بالنسبة ل $+$ في $M_2 \mathbb{R}$

فإن \times تجميعي و توزيعي بالنسبة ل $+$ في E

إذن $E, +, \times$ حلقة

❖

✓ $I = M 1, 0$ هو العنصر المحايد بالنسبة ل \times

إذن $E, +, \times$ حلقة واحدة

❖

✓ \times تبادلي في E

لتكن $M x, y$ و $M a, b$ من E

لدينا : $M a, b \times M x, y = M ax - 3by, ay + bx$

و : $M x, y \times M a, b = M xa - 3yb, xb + ya$

إذن لكل $M a, b$ و $M x, y$ من E : $M a, b \times M x, y = M x, y \times M a, b$

وبالتالي : $E, +, \times$ حلقة واحدة وتبادلية

3. أ)

❖ ليكن a, b و x, y من \mathbb{R}^2

$$\varphi(a+ib) \times \varphi(x+iy) = \varphi(ax-by + i ay+bx) = M\left(ax-by, \frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right) \checkmark$$

$$\begin{aligned} \varphi(a+ib) \times \varphi(x+iy) &= M\left(a, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) \times M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right) \\ &= M\left(ax-3 \times \frac{b}{\sqrt{3}} \times \frac{y}{\sqrt{3}}, a \times \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}} \times x\right) \checkmark \\ &= M\left(ax-by, \frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من \mathbb{C}^*, \times نحو E^*, \times

❖ ليكن $M(a, b)$ من E^*

لنحل المعادلة: $\varphi(x+iy) = M(a, b)$

$$\varphi(x+iy) = M(a, b) \Leftrightarrow M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right) = M(a, b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \frac{y}{\sqrt{3}} = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b\sqrt{3} \end{cases}$$

إذن لكل $M(a, b)$ من E^* يوجد زوج وحيد $x, y = a, b\sqrt{3}$ من \mathbb{R}^2 بحيث:

$$\varphi(x+iy) = M(a, b)$$

ومنه φ تقابل من \mathbb{C}^* نحو E^*

و بالتالي: φ تشاكل تقابلي من \mathbb{C}^*, \times نحو E^*, \times

(ب) بما أن φ تشاكل تقابلي من \mathbb{C}^*, \times نحو E^*, \times و \mathbb{C}^*, \times زمرة تبادلية فإن E^*, \times زمرة تبادلية

(ج)

$$\begin{aligned}
 J^{2017} &= M(0,1)^{2017} \\
 &= \left(M \left(0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) \right)^{2017} \\
 &= \varphi(0+i\sqrt{3})^{2017} \\
 &= \varphi(i\sqrt{3})^{2017} \\
 &= \varphi(\sqrt{3}^{2017} \times i) \\
 &= \varphi(\sqrt{3}^{2016} \sqrt{3} \times i) \\
 &= \varphi(3^{1008} \sqrt{3} \times i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J^{2017^{-1}} &= \varphi(3^{1008} \sqrt{3} \times i)^{-1} \\
 &= \varphi(3^{1008} \sqrt{3} \times i)^{-1} \\
 &= \varphi\left(\frac{1}{3^{1008} \sqrt{3} \times i}\right) \\
 &= \varphi\left(\frac{-i}{3^{1008} \sqrt{3}}\right) \\
 &= \varphi\left(0 + i\left(\frac{-1}{3^{1008} \sqrt{3}}\right)\right) \\
 &= M\left(0, \frac{-\sqrt{3}}{3^{1008} \times \sqrt{3}}\right) \\
 &= M\left(0, \frac{-1}{3^{1008}}\right)
 \end{aligned}$$

.4

✓ لدينا $E, +, \times$ حلقة واحدة وتبادلية

✓ إذن يكفي أن نبين أن كل عنصر x, y من M يقبل مقلوبا E^*

ليكن x, y من E بحيث: $M(x, y) \neq M(0, 0)$

$$M_{x,y} = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ لدينا}$$

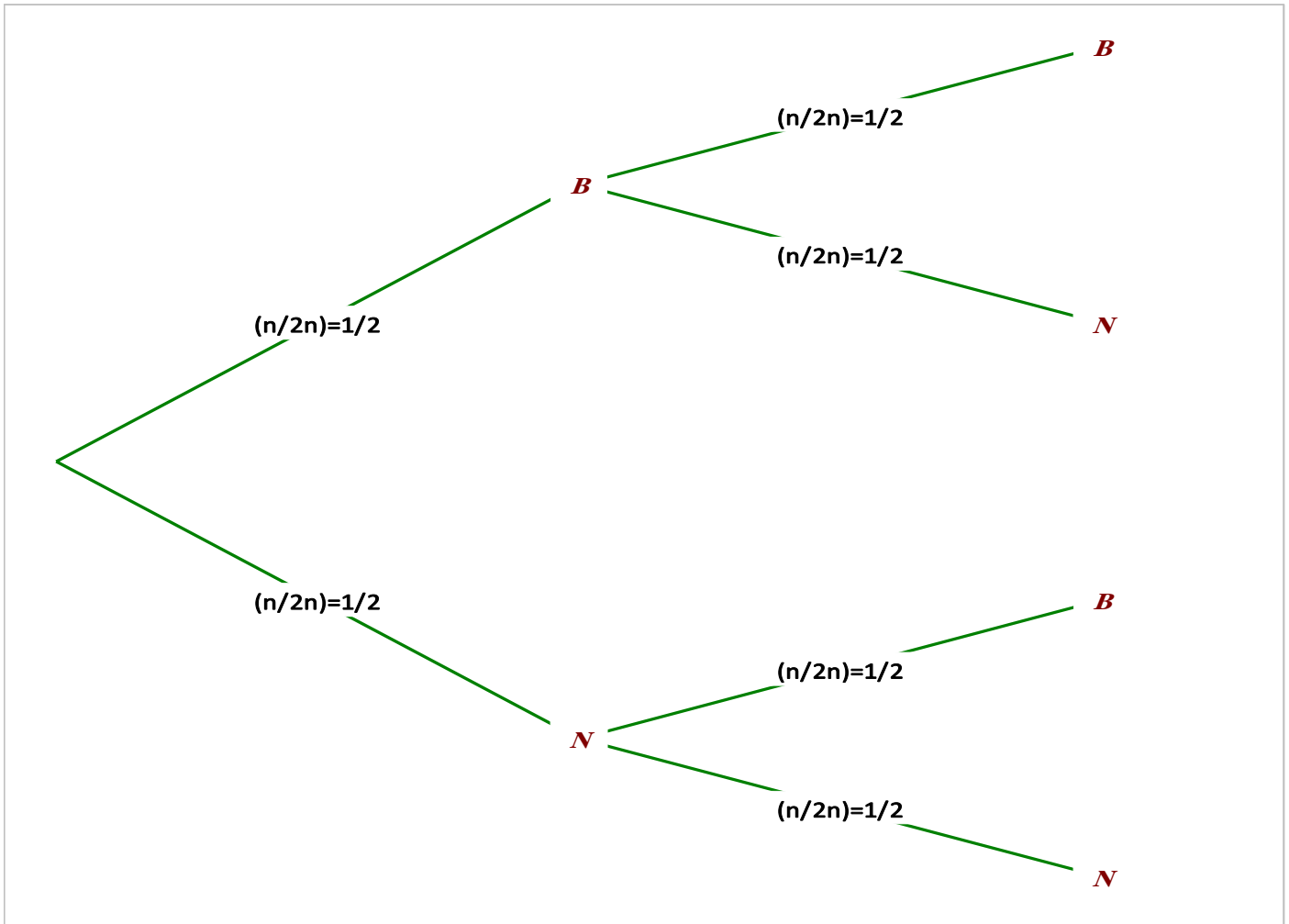
$$\det M_{x,y} = \begin{vmatrix} x & -3y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + 3y^2$$

إذن $\det M_{x,y} \neq 0$ (لأن $x, y \neq 0, 0$)

$$M_{x,y}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+3y^2} & \frac{3y}{x^2+3y^2} \\ \frac{-y}{x^2+3y^2} & \frac{x}{x^2+3y^2} \end{pmatrix} = M \left(\frac{x}{x^2+3y^2}, \frac{-y}{x^2+3y^2} \right) \in E^*$$

و بالتالي : $E, +, \times$ جسم تبادلي.

تصحيح التمرين الثاني



1. ليكن الحدث E " ربح 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أبيض

$$p E = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ليكن الحدث F " خسارة 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أسود

$$p F = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ليكن الحدث G " الربح منعدم " بمعنى الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون

$$p G = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. أ) لنحسب احتمال ربح 100 نقطة بمعنى تحقق الحدث E خمس مرات

$$C_5^5 p E^5 1-p E^{5-5} = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

ب) لنحسب احتمال ربح 40 نقطة بمعنى تحقق الحدث E مرتين

$$C_5^2 p E^2 1-p E^{5-2} = 10 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{270}{1024} = \frac{135}{512}$$

$$p X = -20 = p F = \frac{1}{4} \quad (أ) \quad 3.$$

$$p X = 0 = p G = \frac{1}{2}$$

$$p X = 20 = p E = \frac{1}{4}$$

قانون احتمال X

x_i	-20	0	20
$p X = x_i$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ب) الأمل الرياضي :

$$E X = \left(-20 \times \frac{1}{4}\right) + \left(0 \times \frac{1}{2}\right) + \left(20 \times \frac{1}{4}\right) = 0$$

تصحيح التمرين الثالث

1. ليكن $z \in \mathbb{C}^*$

M' و M منطقتين تكافئ $z' = z$

$$\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = z \text{ تكافئ}$$

$$z = \frac{1}{z} \text{ تكافئ}$$

$$z^2 = 1 \text{ تكافئ}$$

$$z = 1 \text{ أو } z = -1 \text{ تكافئ}$$

2. ليكن $z \in \mathbb{C}^* - \{-1, 1\}$

$$\begin{aligned} \frac{z'+1}{z'-1} &= \frac{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1}{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1} \\ &= \frac{z + \frac{1}{z} + 2}{z + \frac{1}{z} - 2} \\ &= \frac{z^2 + 1 + 2z}{z^2 + 1 - 2z} \\ &= \frac{z+1}{z-1} \\ &= \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{إذن } \frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 \text{ لكل } z \text{ من } \mathbb{C}^* - \{-1, 1\}$$

3. ليكن Δ واسط القطعة AB

نفترض أن M تنتمي إلى Δ

$$\text{إذن } AM = BM$$

$$M \neq A \quad \frac{BM}{AM} = 1 \text{ إذن}$$

لنبين أن M' تنتمي إلى Δ

$$\frac{BM'}{AM'} = \frac{|z'+1|}{|z'-1|} = \frac{|z'+1|}{|z'-1|} = \left| \frac{z+1}{z-1} \right|^2 = \left(\frac{|z+1|}{|z-1|} \right)^2 = \left(\frac{BM}{AM} \right)^2 = 1^2 = 1$$

إذن $AM' = BM'$

و منه M' تنتمي إلى Δ

4. لتكن Γ الدائرة التي أحد أقطارها AB

نفترض أن M تنتمي إلى Γ

$$(\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}) \quad \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \equiv \frac{\pi}{2} \pi$$

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pi$$

لنبين أن M' تنتمي إلى AB

$$\left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'}\right) \equiv \arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right) 2\pi$$

$$\equiv \arg\left(\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right) 2\pi$$

$$\equiv 2 \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) 2\pi$$

$$\equiv \pi 2\pi$$

إذن A و B و M' نقط مستقيمة و منه M' تنتمي إلى AB

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pi \quad \text{لأن}$$

تصحيح التمرين الرابع

الجزء الأول :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = 0, +\infty$ بما يلي :

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) = \frac{\text{Arc tan } x}{x} \quad \text{و} \quad f(0) = 1$$

1. لنبين أن f متصلة على المجال I

✓ لندرس اتصال f في 0 على اليمين

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan } x}{x} = 1 \quad \text{و}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ فإن f في 0 على اليمين

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \text{ : ومنه}$$

و بالتالي f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين ولدينا $f'_d(0) = 0$

3. أ) f قابلة للاشتقاق على $0, +\infty$ (كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $0, +\infty$)
ليكن $x \in 0, +\infty$ لدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\text{Arc tan } x}{x} \right)' \\ &= \frac{\text{Arc tan}' x \times x - \text{Arc tan } x \times x'}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x}{x^2} \quad \text{إذن :}$$

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x}{x^2} \quad \text{ب) لدينا :}$$

و لدينا : $x^2 > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة : $\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x$

حسب الجزء الأول (2) ب) : $\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tan } x \leq 0$

إذن : $f'(x) \leq 0$

ومنه : f تناقصية .

الجزء الثاني :

1. أ) ليكن $t \in 0, +\infty$ و $x \in 0, +\infty$

$$\frac{t}{1+t^2} \leq \text{Arc tan } t \leq t \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{\text{Arc tan } t}{t} \leq 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt \leq \int_0^x 1 dt \quad \text{إذن :}$$

$$\text{Arc tan } x \leq \int_0^x f(t) dt \leq x \quad \text{إذن :}$$

$$\text{إذن : } \frac{\text{Arc tan } x}{x} \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq 1$$

$$\text{و منه : } \forall x \in 0, +\infty \quad \frac{\text{Arc tan } x}{x} \leq g(x) \leq 1$$

$$\text{ب) لدينا : } \forall x \in 0, +\infty \quad f(x) \leq g(x) \leq 1$$

$$\text{إذن : } \forall x \in 0, +\infty \quad f(x-1) \leq g(x-1) \leq 0$$

$$\text{إذن : } \forall x \in 0, +\infty \quad \frac{f(x-1)}{x} \leq \frac{g(x-1)}{x} \leq 0$$

$$\text{إذن : } \forall x \in 0, +\infty \quad \frac{f(x) - f(0)}{x-0} \leq \frac{g(x) - g(0)}{x-0} \leq 0$$

$$\text{لدينا } f \text{ قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = 0$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x-0} = 0$$

و بالتالي : g قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا : $g'_d(0) = 0$

2. أ) ليكن $x \in 0, +\infty$

$t \mapsto f(t)$ متصلة على $0, x$

و الدالة $x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $0, +\infty$

إذن الدالة $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ قابلة للاشتقاق على $0, +\infty$

و لدينا : $x \mapsto \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $0, +\infty$

و منه g قابلة للاشتقاق على $0, +\infty$ (كجاء دالتين قابلتين للاشتقاق على $0, +\infty$)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)' \\ &= \left(\frac{1}{x} \right)' \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} \left(\int_0^x f(t) dt \right)' \\ &= \frac{-1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x) \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{-1}{x} \int_0^x f(t) dt + f(x) \right) \\ &= \frac{1}{x} f(x) - g(x) \end{aligned}$$

و منه : $\forall x \in 0, +\infty \quad g'(x) = \frac{1}{x} f(x) - g(x)$

3. لدينا : $x > 0$ و لدينا : $f(x) - g(x) \leq 0$

إذن : $\forall x \in 0, +\infty \quad g'(x) \leq 0$

و منه g تناقصية على I

4. أ) ليكن $x > 1$ و ليكن $1 \leq t \leq x$

لدينا : $0 < \text{Arc tan } t < \frac{\pi}{2}$

إذن : $0 < \frac{\text{Arc tan } t}{t} < \frac{\pi}{2t}$

إذن : $0 < \int_1^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt < \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt$

إذن : $0 < \int_1^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt < \frac{\pi}{2} \ln t \Big|_1^x$

إذن : $0 < \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt < \frac{\pi \ln x}{2x}$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$

ب) لدينا : $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$

ليكن $t \in 0, 1$

لدينا : $0 \leq t \leq 1$ و f تناقصية

إذن : $f(1) \leq f(t) \leq f(0)$

إذن : $\frac{\pi}{4} \leq f(t) \leq 1$

إذن : $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq 1$

إذن : $\frac{\pi}{4x} \leq \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt \leq \frac{1}{x}$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0 \text{ : ولدينا كذلك}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \text{ : ومنه}$$

الجزء الثالث :

1. لنبين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $0,1$

نعتبر الدالة $h: x \mapsto g(x) - x$

✓ h متصلة على $0,1$

✓ h قابلة للاشتقاق على $0,1$ ولدينا $h'(x) = g'(x) - 1 < 0$ (لأن $g'(x) \leq 0$)

إذن h تناقصية قطعاً على $0,1$

✓ ولدينا : على $h(0) = g(0) - 0 = 1 > 0$ و $h(1) = g(1) - 1 = \int_0^1 f(t) dt - 1 < 0$

إذن : $h(0) \times h(1) < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية : $\exists! \alpha \in 0,1$ $g(\alpha) = 0$

2. أ) ليكن $x \in 0, +\infty$

$$\text{لدينا : } 1 - f(x) = 1 - \frac{\text{Arctan } x}{x}$$

حسب الجزء الأول . (2) ب) : $\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan } x \leq x$

$$\text{إذن : } \forall x \in 0, +\infty \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\text{Arctan } x}{x} \leq 1$$

$$\text{إذن : } \forall x \in 0, +\infty \quad -1 \leq -\frac{\text{Arctan } x}{x} \leq -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{إذن : } \forall x \in 0, +\infty \quad 0 \leq 1 - \frac{\text{Arctan } x}{x} \leq 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{و منه : } \forall x \in 0, +\infty \quad 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$$

(ملاحظة النتيجة تبقى صحيحة في حالة $x=0$)

ب) ليكن $x \in 0, +\infty$

$$\text{لدينا : } 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\text{إذن : } -1 \leq -f(x) \leq \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\text{إذن : } \frac{1}{1+x^2} \leq f(x) \leq 1$$

$$\text{إذن : } \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x 1 dt$$

$$\text{إذن : } \text{Arc tan } x \leq \int_0^x f(t) dt \leq x$$

$$\text{إذن : } f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq 1$$

$$\text{إذن : } f(x) \leq g(x) \leq 1$$

$$\text{إذن : } 0 \leq g(x) - f(x) \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\text{إذن : } 0 \leq \frac{1}{x} (g(x) - f(x)) \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{و منه : } \forall x \in 0, +\infty \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

3. أ) ليكن $n \in \mathbb{N}$ لدينا :

✓ g متصلة على المجال المغلق الذي طرفاه u_n و α

✓ g قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح الذي طرفاه u_n و α

$$\forall x \in 0, +\infty \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

إذن حسب متباينة التزايديات المنتهية : $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

وبما أن $u_{n+1} = g(u_n)$ و $\alpha = g(\alpha)$

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

ب) لنتين بالترجع : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

✓ من أجل $n=0$:

$$\text{لدينا : } |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha| \text{ و } \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$$

$$\text{إذن : } |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\blacksquare \text{ نفترض أن : } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\blacksquare \text{ و نبين أن : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha| \text{ ؟}$$

$$\text{لدينا حسب الافتراض : } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\boxed{a} \text{ إذن : } \left| \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha| \right|$$

$$\boxed{b} \text{ و حسب نتيجة السؤال السابق : } \left| u_{n+1} - \alpha \right| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$\text{من } \boxed{a} \text{ و } \boxed{b} \text{ نستنتج : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

$$\checkmark \text{ نستنتج : } \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\text{بما أن } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ فإن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ و منه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

$$\text{و بالتالي المتتالية } u_n \text{ متقاربة و لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

ك