



الصفحة
1
4



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة العادية 2010  
الموضوع

9	المعامل:	NS25	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		الشعب(ة) أو المسلك:

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques .
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes .
- Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique .
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.

Les calculatrices programmables sont strictement interdites

**Exercice 1 :** (3,5 points) **Les partis I et II sont indépendantes.**

**I** - On munit l'ensemble  $I = ]0, +\infty[$  de la loi de composition interne  $*$  définie par :

$$(\forall (a, b) \in I \times I) \quad a * b = e^{\ln(a) \cdot \ln(b)}$$

- 0,5 1) Montrer que la loi  $*$  est commutative et associative dans  $I$  .
- 0,25 2) Montrer que la loi  $*$  admet un élément neutre  $\varepsilon$  que l'on déterminera.
- 0,75 3) a-Montrer que  $(I \setminus \{1\}, *)$  est un groupe commutatif.  
 ( $I \setminus \{1\}$  désigne l'ensemble  $I$  privé de 1).
- 0,25 b-Montrer que  $]1, +\infty[$  est un sous-groupe de  $(I \setminus \{1\}, *)$ .
- 0,25 4) On munit  $I$  de la loi de composition interne  $\times$  ( $\times$  est la multiplication dans  $\square$  )
- 0,25 a-Montrer que la loi  $*$  est distributive par rapport à la loi  $\times$
- 0,5 b-Montrer que  $(I, \times, *)$  est un corps commutatif.

**II** - On considère la matrice :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

- 0,5 1) Calculer  $A^2$  et  $A^3$
- 0,5 2) En déduire que la matrice  $A$  est non inversible.

**Exercice 2 :** ( 3,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .

- 0,25 1) a-Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe  $3 + 4i$
- 0,5 b-Résoudre dans l'ensemble  $\square$  l'équation :  $(E) : 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$
- 2) Soient  $a$  et  $b$  les solutions de l'équation  $(E)$  avec  $\text{Re}(a) < 0$  et soient  $A$  et  $B$  leurs points images respectifs dans le plan complexe.
- 0,25 a-Vérifier que :  $\frac{b}{a} = 1 - i$
- 0,75 b- En déduire que le triangle  $AOB$  est rectangle et isocèle en  $A$  .
- 3) Soient  $C$  un point du plan différent du point  $A$  ayant pour affixe  $c$  et  $D$  l'image du point  $B$  par la rotation de centre  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  ; et soit  $L$  l'image du point  $D$  par la translation de vecteur  $\vec{AO}$  .
- 0,5 a-Déterminer en fonction de  $c$  le nombre complexe  $d$  affixe du point  $D$
- 0,5 b-Déterminer en fonction de  $c$  le nombre complexe  $\ell$  affixe du point  $L$
- 0,75 c-Déterminer la forme algébrique du nombre complexe  $\frac{\ell - c}{a - c}$  ; en déduire la nature du triangle  $ACL$  .

**Exercice 3 :** ( 3 points)

- 1) Déterminer tous les nombres entiers naturels  $m$  tels que :  $m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$  [5]
- 2) Soit  $p$  un nombre premier tel que  $p = 3 + 4k$  où  $k$  est un nombre entier naturel .  
Soit  $n$  un nombre entier naturel tel que :  $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$
- 0,25 a- Vérifier que :  $(n^2)^{1+2k} \equiv -1 \pmod{p}$
- 0,5 b- Montrer que  $n$  et  $p$  sont premiers entre eux.
- 0,75 c- En déduire que :  $(n^2)^{1+2k} \equiv 1 \pmod{p}$
- 0,5 d- Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel  $n$  vérifiant :  $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

**Exercice 4 :** (6.25 points)

I- On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = 4xe^{-x^2}$

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 0,5 1) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$
- 0,75 2) Etudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  puis donner son tableau de variations.
- 0,75 3) Déterminer l'équation de la demi-tangente à la courbe  $(C)$  à l'origine du repère puis construire la courbe  $(C)$ . (on prend  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$  et on admet que le point d'abscisse  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  est un point d'inflexion de la courbe  $(C)$ )
- 0,5 4) Calculer l'intégrale  $a = \int_0^1 f(x) dx$  puis en déduire, en centimètre carré, l'aire de la partie plane limitée par la courbe  $(C)$ , les deux axes du repère et la droite d'équation  $x = 1$

**II) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 .**

On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :  $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$

- 0,25 1) a- Montrer que :  $(\forall x > 1) \quad e^{-x^2} < e^{-x}$
- 0,25 b- En déduire la limite de  $f_n$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$
- 0,75 2) Etudier les variations de la fonction  $f_n$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  puis donner son tableau de variations.
- 0,5 3) Montrer qu'il existe un nombre réel unique  $u_n$  de l'intervalle  $]0, 1[$  tel que :  $f_n(u_n) = 1$
- 0,25 4) a- Montrer que :  $(\forall n \geq 2) \quad f_{n+1}(u_n) = u_n$

0,75 b-montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

4) On pose :  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

0,25 a-Montrer que :  $0 < \ell \leq 1$

0,25 b-Montrer que :  $(\forall n \geq 2) \quad -\frac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$

0,5 c-En déduire que :  $\ell = 1$

### Exercice 5 : (3.75 points)

On considère la fonction numérique  $F$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

0,25 1) Montrer que  $F$  est impaire.

2) Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0, +\infty[$  on pose :  $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

0,25 a-Vérifier que :  $(\forall x > 0) \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$

0,5 b-Montrer que  $F$  est dérivable sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  puis calculer  $F'(x)$  pour  $x > 0$ .

0,5 c-En déduire le sens de variations de la fonction  $F$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

0,5 3) a-En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x > 0) \quad (\exists c \in ]x, 2x[) : F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$$

0,25 b- En déduire que :  $(\forall x > 0) \quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$

0,75 c-Déterminer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

0,75 d-Montrer que :  $F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1}$  et  $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}$

en déduire que l'équation  $F(x) = x$  admet une solution unique dans  $]0, +\infty[$ .



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة العادية 2010  
عناصر الإجابة



الصفحة
1
3

9	المعامل:	NR25	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		الشعب(ة) أو المسلك:

التمرين الأول (3.5 نقط)	عناصر الإجابة
(1-I)	القانون * تبادلي .....0.25 القانون * تجميعي .....0.25
(2)	العنصر المحايد : $\varepsilon = e$ .....0.25
(3) أ-	$I \setminus \{1\}$ جزء مستقر من $(I, *)$ .....0.25 القانون المستخلص من * تبادلي وتجميعي ويقبل $\varepsilon$ كعنصر محايد في $I \setminus \{1\}$ .....0.25 جميع عناصر $I \setminus \{1\}$ تقبل مماثلا في $I \setminus \{1\}$ .....0.25
ب-	تطبيق الخاصية المميزة لزمرة جزئية.....0.25
(4) أ-	$a * (b \times c) = (a * b) \times (a * c)$ .....0.25
ب-	زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو 1 .....0.25 القانون * توزيعي بالنسبة للقانون $\times$ و $(I \setminus \{1\}, *)$ زمرة تبادلية.....0.25
(1-II)	نجد : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .....0.25 و $A^3 = O$ .....0.25
(2)	إذا كانت $A$ تقبل مقلوبا نستنتج أن $A^2 = O$ و هذا تناقض.....0.5 ن
التمرين الثاني (3.5 نقط)	عناصر الإجابة
(1) أ-	الجزران المربعان هما $2+i$ و $-2-i$ .....0.25
ب-	حلا المعادلة هما: $-\frac{1}{2} + i$ و $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ .....0.5
(2) أ-	.....0.25
ب-	.....0.75
(3) أ-	نحصل على : $d = (1-i)c - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ .....0.5

الصفحة 2 3	NR25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2010 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)
		ب- نحصل على : $\ell = (1-i)c - 1 - \frac{1}{2}i$ ..... 0.5
		ج- نحصل على : $\frac{\ell - c}{a - c} = i$ ..... 0.25 ثم نستنتج أن: - المثلث $ACL$ متساوي الساقين رأسه $C$ ..... 0.25 - المثلث $ACL$ قائم الزاوية في $C$ ..... 0.25
		التمرين الثالث (3 نقط)
		عناصر الإجابة
		1) نجد $m \equiv 2 [5]$ أو $m \equiv 3 [5]$ ..... 1
		2) لدينا : $[p] \equiv -1 [p]$ إذن $n^2 \equiv -1 [p] \equiv (-1)^{1+2k} [p] \equiv (n^2)^{1+2k} [p]$ ..... 0.25
		ب- لدينا $[p] \equiv n^2 + 1$ إذن : $kp - n^2 = 1$ ( $\exists k \in \mathbb{Z}$ ) وحسب مبرهنة بوزو ..... 0.5
		ج- حسب مبرهنة فيرما وكون : $p - 1 = 2 + 4k$ ..... 0.75
		د- من الأسئلة السابقة نستنتج أن : $[p] \equiv -1 [p]$ و $1 \equiv -1 [p]$ عدد أولي فردي و هذا تناقض ..... 0.5
		التمرين الرابع (6.25 نقط)
		عناصر الإجابة
		1-I) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ..... 0.5
		2) $f$ تزايدية على المجال $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و تناقصية على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right]$ ..... 0.5 جدول تغيرات $f$ ..... 0.25
		3) معادلة نصف المماس ..... 0.25 إنشاء $(C)$ ..... 0.5
		4) نحصل على $a = 2\left(\frac{e-1}{e}\right)$ ..... 0.25 مساحة الحيز المستوي هي : $8\left(\frac{e-1}{e}\right)cm^2$ ..... 0.25
		1-II) أ- ..... 0.25
		ب- لدينا : $0 < x^n e^{-x^2} < x^n e^{-x}$ ( $\forall x > 1$ ) و نحصل على $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ ..... 0.25
		2) $f_n$ تزايدية على المجال $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ و تناقصية على المجال $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right]$ ..... 0.5 جدول تغيرات $f_n$ ..... 0.25
		3) لدينا : $f_n(0) = 0 < 1$ و $f_n(1) = \frac{4}{e} > 1$ و $f_n$ متصلة و رتيبة قطعا على المجال $[0, 1]$ ..... 0.5
		4) أ- لدينا : $f_{n+1}(u_n) = 4u_n^{n+1}e^{-u_n^2} = u_n$ ..... 0.25
		ب- لدينا : $f_{n+1}(u_n) = u_n < 1 = f_{n+1}(u_{n+1})$ و $f_{n+1}$ و $f_n$ تزايدية قطعا على المجال $[0, 1]$ إذن المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ تزايدية قطعا ..... 0.5

الصفحة 3 3	NR25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2010 - عناصر الإجابة مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)
		المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ تزايدية قطعا و مكبورة بالعدد 1 إذن متقاربة .....0.25
	أ-	لدينا : $0 \leq \ell \leq 1$ و $(u_n)_{n \geq 2}$ تزايدية قطعا إذن $u_n > u_2 > 0$ $(\forall n > 2)$ .....0.25
	ب-	لدينا : $f_n(u_n) = 1$ تكافئ $\ln(4) + n \ln(u_n) = u_n^2$ وبما أن : $0 < u_n < 1$ .....0.25
	ج-	لدينا : $(\forall n \geq 2) \quad -\frac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$ والدالة $x \rightarrow \ln(x)$ متصلة على $]0,1[$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ عندما توول $n$ إلى $+\infty$ نحصل على $\ln(\ell) = 0$ .....0.5 و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى
		عناصر الإجابة
		التمرين الخامس (3.75 نقط)
	1	الدالة $F$ فردية .....0.25
	أ-2	.....0.25
	ب-	الدالة $\varphi$ دالة أصلية للدالة $t \rightarrow \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ على المجال $]0, +\infty[$ أو الدالة $t \rightarrow \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ متصلة على المجال $]0, +\infty[$ والدالتين $v: x \rightarrow x$ و $u: x \rightarrow 2x$ قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ و $u(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ و $v(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ .....0.25 و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى لدينا $F'(x) = \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}$ .....0.25
	ج-	الدالة تناقصية قطعا على المجال $]0, \sqrt{2}[$ و تزايدية قطعا على المجال $[\sqrt{2}, +\infty[$ .....0.5
	أ-3	لدينا : $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$ $(\forall x > 0)$ حيث $\varphi$ دالة أصلية للدالة $t \rightarrow \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ على المجال $]0, +\infty[$ ثم نطبق مبرهنة التزايد المتناهية .....0.5
	ب-	الدالة $t \rightarrow \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ تناقصية قطعا على $[x, 2x]$ .....0.5
	ج-	نجد : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ و تمنح 0.25 لكل نهاية
	د-	تمنح 0.25 لكل متفاوتة لدينا $F(x) < x$ $(\forall x > \sqrt{e-1})$ و $F(x) > x$ $(\forall x < \frac{\sqrt{e-1}}{2})$ و يوجد عدد وحيد $\alpha$ من المجال $[\frac{\sqrt{e-1}}{2}, \sqrt{e-1}[$ بحيث $F(\alpha) = \alpha$ .....0.25