الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2013
الموضوع

NS25

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعب(ة) أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte trois exercices et un problème indépendants deux à deux.
- Les exercices et le problème peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes.
- Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique.
- Le problème se rapporte à l'analyse.

L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

Exercice1 :(3,5pts)

On rappelle que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un anneau commutatif, unitaire et intègre.

1- On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ ;\ x*y=x+y-2$$

0.5 a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0.25 b) Montrer que $(\mathbb{R},*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0.5 c) En déduire que $(\mathbb{R},*)$ est un groupe commutatif.

2- On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne T définie par :

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ ;\ x\mathrm{T}y=xy-2x-2y+6$$

et on considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)=x+2$

0.5 a) Montrer que l'application f est un isomorphisme de $(\mathbb{R},\times)$ dans $(\mathbb{R},\mathrm{T})$

0.25 b) Montrer que : $(\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3)\ ;\ (x*y)\mathrm{T}z=(x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)$

0.75 3- En déduire de tout ce qui précède que $(\mathbb{R},*,\mathrm{T})$ est un anneau commutatif et unitaire.

0.25 4-a) Montrer que : $x\mathrm{T}y=2$ si est seulement si ($x=2$ ou $y=2$)

0.25 b) En déduire que l'anneau $(\mathbb{R},*,\mathrm{T})$ est intègre.

0.25 c) $(\mathbb{R},*,\mathrm{T})$ est-il un corps ? (justifier votre réponse)

Exercice2 :(3,5pts)

I- Soit a un nombre complexe non nul.

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : (E): $2z^2-(3+i\sqrt{3})a\,z+(1+i\sqrt{3})a^2=0$

0.25 1-Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $(-1+i\sqrt{3})^2a^2$

0.5 2-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

II-Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A, B et M d'affixes respectifs a , $b=ae^{i\frac{\pi}{3}}$ et z

Soit r la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

On pose $A_1=r^{-1}(A)$ et $B_1=r(B)$ (r^{-1} désigne la rotation réciproque de r)

et soient a_1 et b_1 les affixes respectifs de A_1 et B_1

0.5 1-Vérifier que le triangle OAB est équilatéral.

0.5 2- a) Montrer que : $a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ et $b_1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

0.5 b) Montrer que le quadrilatère OA_1MB_1 est un parallélogramme.

3- On suppose que : $M\neq A$ et $M\neq B$

0.5 a) Montrer que : $\dfrac{z-b_1}{z-a_1}=-\dfrac{z-b}{z-a}\times\dfrac{a}{b}$

0.75 b) Montrer que M , A_1 et B_1 sont alignés si et seulement si M , O , A et B sont cocycliques.

Exercice3 :(3pts)

L'objectif de l'exercice est de chercher les entiers naturels n strictement supérieurs à 1 et qui vérifient la propriété suivante : $(R): 3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$

1-On suppose que n vérifie la propriété (R) et soit p **le plus petit diviseur premier positif** de n.

0.75 a)Montrer que : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$, en déduire que $p \geq 5$

0.5 b) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$

0.5 c)Montrer qu'il existe un couple (a,b) de □^{2} tel que : $an - b(p-1) = 1$

0.5 d) Soient r et q le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $p-1$

$$\left(a = q(p-1) + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < p-1 \ \text{ et } q \in □\right)$$

Montrer qu'il existe **un entier naturel** k tel que : $rn = 1 + k(p-1)$

0.75 2- En déduire de tout ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1 vérifiant (R)

Problème :(10pts)

On considère la fonction numérique h définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par :

$$h(1) = 1 \ \text{ et } \ (\forall x > 1) ;\ h(x) = \frac{x-1}{x\ln x}$$

Première partie :

0.25 1-a)Montrer que la fonction h est continue à droite en 1

0.75 b) Montrer que : $(\forall x > 1) ;\ \ln x < x - 1$, en déduire que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$

0.5 2-a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ puis donner le tableau de variations de h

0.25 b) En déduire que : $(\forall x \geq 1) ;\ 0 < h(x) \leq 1$

Deuxième partie :

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par :

$$g(1) = \ln 2 \ \text{ et } \ (\forall x > 1) ;\ g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,dt$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.25 1-a) Vérifier que : $(\forall x > 1) ;\ \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln 2$

0.25 b) Vérifier que : $(\forall x > 1) ;\ g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\,dt$

0.5 c) Montrer que : $(\forall x > 1) ;\ g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt$

0.5 2-a)Montrer que : $(\forall x>1)\ ;\ \left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\leq g(x)-\ln 2\leq\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$

0. 5 b) En déduire que la fonction g est dérivable à droite au point 1

0.75 c)Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$

0.75 3-a)Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$ et que : $(\forall x>1)\ ;\ g'(x)=\dfrac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$

0.5 b) En déduire que : $(\forall x\geq 1)\ ;\ 0<g'(x)\leq\dfrac{1}{2}$, puis donner le tableau de variations de g

0.5 c) Construire la courbe (C)

Troisième partie :

0.5 **I**-1-Montrer que la fonction $k:x\mapsto g(x)-x+1$ est une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ dans l'intervalle $]-\infty,\ln 2]$

0.25 2- En déduire qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1,+\infty[$ qui vérifie : $1+g(\alpha)=\alpha$

II- On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$1\leq u_0<\alpha \quad\text{et}\quad (\forall n\geq 0)\ ;\ u_{n+1}=1+g(u_n)$$

0.5 1- a) Montrer que : $(\forall n\geq 0)\ ;\ 1\leq u_n<\alpha$

0.5 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

0.75 c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

0.5 2-a) Montrer que : $(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$

0.25 c) En déduire une deuxième fois, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

FIN

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2013
عناصر الإجابة

NR25

الصفحة 1 / 3

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	المعامل	9

المرجو من السادة المصححين أن يأخذوا بعين الاعتبار مختلف الأجوبة الصحيحة للتلميذ و عدم التقيد فقط بالحلول المقترحة في هذه الوثيقة.

التمرين الأول	**(3.5نقطة)**
1-أ)	القانون $*$ تبادلي........................0.25ن القانون $*$ تجميعي........................0.25ن
ب)	$(\square,*)$ يقبل عنصرا محايدا هو 2 ....0.25ن
ج)	كل عنصر من $\square$ يقبل مماثلا في $(\square,*)$........................0.25ن $(\square,*)$ زمرة تبادلية........................0.25ن
2- أ)	التطبيق f تشاكل........................0.25ن التطبيق f تقابل........................0.25ن
ب)	المتساوية........................0.25ن
3-	- باستعمال التشاكل f القانون T تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا........................0.25ن - القانون T توزيعي بالنسبة للقانون $*$ ....0.25ن - $(\square,*)$ زمرة تبادلية و الخلاصة........................0.25ن
4- أ)	التكافؤ 0.25ن
ب)	الحلقة لا تقبل قواسم للصفر........................0.25ن
ج)	العنصر x من $\square$ يقبل مماثلا بالنسبة للقانون T إذا و فقط إذا كان $\frac{1}{x-2}\in\square$ يعني $x=3$ أو $x=1$ إذن $(\square,*,\mathrm{T})$ ليس جسما أو فقط مثال مضاد 0.25ن
التمرين الثاني	**(3.5 نقطة)**
I- 1-	تحديد مميز المعادلة........................0.25ن
2-	حل المعادلة (E) 0.5ن
II-1-	التحقق من أن OAB متساوي الأضلاع........................0.5ن
2-أ)	حساب a_1 ....0.25ن

	حساب b_1 .... 0.25ن
ب)	OA_1MB_1 متوازي الأضلاع 0.5ن
3- أ)	المتساوية 0.5ن
ب)	التكافؤ 0.75ن
التمرين الثالث:	**(3نقط)**
1-أ)	p/n و n يقسم 3^n-2^n .... 0.25ن الاستنتاج 0.5ن
ب)	تطبيق مبرهنة فيرما في حالتي 2 و 3 .... 0.25+0.25=0.5ن
ج)	العددان n و $p-1$ أوليان فيما بينهما .... 0.25ن تطبيق مبرهنة بوزو 0.25ن
د)	نأخذ $k=b-qn$ .... 0.25ن ثم نبين أنه k عدد صحيح طبيعي 0.25ن
-2	البرهان بالخلف ثم نحصل على $3^{nr}\equiv 2^{nr}\ [p]$ و $3^{k(p-1)}\equiv 2^{k(p-1)}\ [p]$ اذن $3\equiv 2\ [p]$ أي أن $p=1$ و هذا تناقض 0.75ن
مسألة:	**(10 نقط)**
الجزء الأول 1- أ)	لدينا: $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=1$ و $h(1)=1$ 0.25ن
ب)	المتفاوتة .... 0.25ن h تناقصية قطعا (إشارة $h'(t)$ هي إشارة $\ln t-t+1$) 0.5ن
2- أ)	$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$ .... 0.25ن جدول التغيرات 0.25ن
ب)	الاستنتاج من جدول التغيرات 0.25ن
الجزء الثاني 1- أ)	التحقق باستعمال دالة أصلية للدالة: $t\to\dfrac{1}{t\ln t}$ 0.25ن
ب)	التحقق باستعمال مجموع تكاملين 0.25ن
ج)	استعمال طريقة تغيير المتغير بوضع : $u=\sqrt{t}$ 0.5ن
2- أ)	المتفاوتة المزدوجة 0.5ن

ب)	الاستنتاج من السؤال 2-أ) بتأطير $\dfrac{g(x)-\ln 2}{x-1}$ 0.5ن
ج)	النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ 0.25ن
	النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}=0$ 0.5ن
3-أ)	قابلية اشتقاق g 0.25ن
	حساب $g'(x)$ 0.5ن
ب)	الاستنتاج 0.25ن
	جدول التغيرات... 0.25ن
ج)	انشاء المنحنى (C) 0.5ن

الجزء الثالث:

I - 1-	الدالة k متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[1,+\infty[$ 0.25ن
	و $k([1,+\infty[)=]-\infty,\ln 2]$ 0.25ن
2-	وجود و وحدانية العدد α 0.25ن
II 1- أ)	البرهان بالترجع 0.5ن
ب)	المتتالية تزايدية قطعا 0.5ن
ج)	- بما أنها أيضا مكبورة بالعدد α .... 0.25ن - الدالة $x\mapsto 1+g(x)$ متصلة على المجال $[1,+\infty[$ و المتتالية متقاربة ادن نهايتها حل للمعادلة $x=1+g(x)$ 0.5ن
2- أ)	تطبيق مبرهنة (أو متفاوتة) التزايدات المنتهية.. 0.5ن
ب)	البرهان بالترجع أو أي طريقة صحيحة.. 0.5ن
ج)	لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ وتوظيف مصاديق التقارب.. 0.25ن