المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2014

الموضوع

NS 25

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب) (الترجمة الفرنسية)	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte à l'arithmétique…………….......(3 pts)
- Le deuxième exercice se rapporte aux structures algébriques...…(3.5 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes……...(3.5 pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse………………..…..(8 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse……………...……(2pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

Exercice 1 : (3 pts)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \underbrace{333.......3}_{n\ fois}1$ (n fois le chiffre 3)

0.5 1-Vérifier que les deux nombres a_1 et a_2 sont premiers.

0.5 2- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

0.75 3 -Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7\ [31]$

0.75 4 -Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0\ [31]$,puis en déduire que : 31divise a_{30k+1}

0.5 5- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, si $n \equiv 1\ [30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$

Exercice 2 :(3.5pts)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$,on pose : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble

$E = \{M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

0.5 1-Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.75 2- Calculer $J^2 = J \times J$ sachant que $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis en déduire que E n'est pas stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

3-On définit sur $M_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $*$ par :

$$A * B = A \times N \times B \quad \text{avec } N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ qui associe à chaque nombre complexe non nul $a + ib$ (a et b étant deux nombres réels) la matrice $M(a,b)$.

0.5 a)Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),*)$

0.25 b)On pose : $E^* = E - \{O\}$ .Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

0.5 c)Montrer que $(E^*,*)$ est un groupe commutatif.

0.5 4-Montrer que : $(\forall (A,B,C)\in E^3)\quad A*(B+C)=A*B+A*C$

0.5 5-En déduire de ce qui précède que $(E,+,*)$ est un corps commutatif.

Exercice 3 :(3.5pts)

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit θ un nombre réel tel que : $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[- \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1-On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E)\quad z^2-\sqrt{2}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$

0.25 a)Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta=\left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2$

0.75 b) Ecrire sous forme trigonométrique les deux racines z_1 et z_2 de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$

2- On considère les points I , J , T_1 , T_2 et A d'affixes respectives

$1,\ -1\ ,\ e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)},\ e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\ et\ \sqrt{2}e^{i\theta}$

0.5 a) Montrer que les deux droites (OA) et (T_1T_2) sont perpendiculaires.

0.25 b) Soit K le milieu du segment $[T_1T_2]$.Montrer que les points $O,K\ et\ A$ sont alignés.

0.25 c) En déduire que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$.

3- Soit r la rotation de centre T_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0.25 a) Donner l'expression complexe de la rotation r

0.5 b) Vérifier que l'affixe du point B image du point I par la rotation r est : $b=\sqrt{2}e^{i\theta}+i$

0.25 c) Montrer que les deux droites $(AB)\ et\ (IJ)$ sont perpendiculaires.

0.25 4-Déterminer l'affixe du point C image du point A par la translation de vecteur $(-\vec{v})$

0.25 5-Montrer que A est le milieu du segment $[BC]$

Exercice 4 :(8 pts)

I – On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x\ln x}{1+x^2}\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

0.5 1-a)Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

0.25 b)Etudier le signe de $f(x)$ sur $[0,+\infty[$.

0.25 2-a)Montrer que : $(\forall x\in \mathbb{R}_+^*)\qquad f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

0.25 b) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$

0.5 c)Montrer que : $(\exists\alpha\in]0,1[)\quad f'(\alpha)=0$

0.5 d)En déduire que : $f'\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=0$

II - On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

0.5 1-a)Vérifier que : $(\forall t\in[1,+\infty[)\quad \dfrac{1}{2}\le\dfrac{t^2}{1+t^2}\le 1$

1 b) Montrer que : $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad F(1)-\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\le F(x)\le F(1)-\dfrac{1}{4}(\ln x)^2$

(On remarquera que : $F(x)=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt-\int_1^x\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{\ln t}{t}\,dt$)

1 c)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

0.5 2-a)Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$

0.25 b) Etudier les variations de F sur $[0,+\infty[$

0.5 III -1-a)Montrer que : $(\forall t\in]0,+\infty[)\quad -t\ln t\le\dfrac{1}{e}$

0.25 b)En déduire que : $(\forall t\in[0,+\infty[)\quad f(t)\le\dfrac{1}{e}$

0.25 c)Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad F(x)<x$

2-On considère la suite $(u_n)_{n\ge0}$ définie par : $u_0\in]0,1[$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}=F(u_n)$

0.5 a)Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\in]0,1[$

0.5 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0.5 c)Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Exercice 5 :(2 pts)

On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\ ;\ x>0\\ g(0)=0\end{cases}$

0.5 1- Montrer que g est continue sur $[0,+\infty[$.

2-Pour tout réel x de l'intervalle $[0,+\infty[$ on pose : $L(x)=\int_x^1 g(t)dt$

0.25 a) Montrer que L est continue sur $[0,+\infty[$.

0.25 b) Calculer $L(x)$ pour $x>0$

0.5 c) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x)$ et en déduire la valeur de $L(0)$

3-Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $s_n=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

0.5 Montrer que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

FIN