EXERCICE1 : (3.5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\quad;\quad(x+yi)*(a+bi)=xa+\left(x^2b+a^2y\right)i$$

0.25 1-a) Montrer que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$

0.5 b) Montrer que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$

0.25 c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e que l'on déterminera.

0.25 d) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe $x+yi$ admet le nombre complexe $\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i$ comme symétrique pour la loi $*$

2-On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ défini par : $E=\left\{x+yi\,/\,x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ y\in\mathbb{R}\right\}$

0.25 a) Montrer que E est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$

0.5 b) Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

0.5 3-On considère le sous-ensemble G de E défini par : $G=\left\{1+yi\,/\,y\in\mathbb{R}\right\}$

Montrer que G est un sous-groupe de $(E,*)$

4-On considère l'ensemble $F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}/\,x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ y\in\mathbb{R}\right\}$

0.25 a) Montrer que F est stable pour la loi $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$

0.5 b) Soit φ l'application de E vers F qui à tout nombre complexe $x+yi$ de E fait correspondre la matrice $M(x^2,y)=\begin{pmatrix}x^2&y\\0&x^2\end{pmatrix}$ de F

Montrer que φ est un isomorphisme de $(E,*)$ vers $(F,\times)$

0.25 c) En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif.

MEN-GOV.MA

EXERCICE2 :(3.5 points)

Soit m un nombre **complexe non réel** ($m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$)

I- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E) \ : \ z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E)

2- On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

0.5 a) Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$

0.25 b) Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère les points suivants :

A le point d'affixe $a = 1+i$, B le point d'affixe $b = (1+i)m$, C le point d'affixe $c = 1-i$, D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.

0.5 1- a) Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega = \dfrac{(1-i)(1-m)}{2}$

0.25 b) Calculer $\dfrac{b-a}{\omega}$

0.5 c) En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$

2- La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

0.5 a) Montrer que $\dfrac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\dfrac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur.

0.25 b) En déduire h en fonction de m

MEN-GOV.MA

EXERCICE3 : (3 points)

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un **nombre premier**.

Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8+m^8\equiv 0\ [2969]$

1- On suppose dans cette question que 2969 **ne divise pas** n

0.5 a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists u\in\mathbb{Z})\ ;\ u\times n\equiv 1\ [2969]$

0.5 b) En déduire que : $(u\times m)^8\equiv -1\ [2969]$ et que $(u\times m)^{2968}\equiv -1\ [2969]$

(On remarque que : $2968=8\times 371$)

0.5 c) Montrer que 2969 ne divise pas $u\times m$

0.5 d) En déduire qu'on a aussi $(u\times m)^{2968}\equiv 1\ [2969]$

0.5 2-a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 **divise** n

0.5 b) Montrer que : $n^8+m^8\equiv 0\ [2969] \Leftrightarrow n\equiv 0\ [2969]$ et $m\equiv 0\ [2969]$

EXERCICE4 : (10 points)

PARTIE I : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x\left(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)$

et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 1- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0.5 2- a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=4\left(e^{-x}-1\right)(1-x)$

0.75 b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis donner son tableau de variations.

0.5 c) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left]\frac{3}{2},2\right[$ tel que $f(\alpha)=0$

(On prendra $e^{\frac{3}{2}}=4,5$)

0.25 d) Vérifier que : $e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}$

0.5 3-a) En appliquant le théorème de ROLLE à la fonction f', montrer qu'il existe un réel x_0 de l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f''(x_0)=0$

0.5 b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f'', montrer que, pour tout réel x différent de x_0 de l'intervalle $[0,1]$, on a : $\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$

MEN-GOV.MA

0.25 c) En déduire que $I\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ est un point d'inflexion de la courbe (C)

0.5 4-a) Etudier les branches infinies de la courbe (C)

0.5 b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

(On prendra : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$, $f(1) = -0.5$ et il n'est pas demandé de représenter le point I)

0.25 5-a) Vérifier que : $(\forall x \in]-\infty, \alpha])$; $f(x) \leq 0$

0.75 b) Montrer que : $\int_0^{\alpha} f(x)dx = \frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2 - 3\right)$, en déduire que : $\frac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$

0.5 c) Calculer en fonction de α, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y = 0$, $x = 0$ et $x = \alpha$

PARTIE II : On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 < \alpha \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) + u_n$$

0.5 1-a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n < \alpha$ (utiliser la question 5-a) de la PARTIE I)

0.25 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2- **On suppose que** $0 \leq u_0$ et on pose $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

0.5 a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) > 0$ (On prendra : $\ln 2 = 0.69$)

b) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n$

0.5 (On remarque que : $f(x) + x = 4xg(x)$)

0.25 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

0.5 d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3- **On suppose que** $u_0 < 0$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \leq u_0 + nf(u_0)$

0.25 c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

FIN

MEN-GOV.MA