



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة الإستدراكية 2010  
الموضوع



الصفحة
1
3

7	المعامل:	RS22	الرياضيات	المادة:
3	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها		الشعب(ة) أو المسلك:

### معلومات عامة

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛

مدة إنجاز موضوع الامتحان : 3 ساعات ؛

عدد الصفحات : 3 صفحات ( الصفحة الأولى تتضمن معلومات والصفحتان المتبقيتان تتضمنان تمارين الامتحان )؛

يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان في الترتيب الذي يناسبه ؛

ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

### معلومات خاصة

يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

النقطة الممنوحة	المجال	التمرين
3 نقط	الهندسة الفضائية	التمرين الأول
3 نقط	الأعداد العقدية	التمرين الثاني
3 نقط	حساب الاحتمالات	التمرين الثالث
3 نقط	المتتاليات العددية	التمرين الرابع
8 نقط	دراسة دالة وحساب التكامل	التمرين الخامس

بالنسبة للتمرين الخامس ،  $\ln$  يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري .

## الموضوع

## التمرين الأول (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، النقط  $A(0, -2, 0)$  و  $B(1, 1, -4)$  و

$C(0, 1, -4)$  و  $(S)$  مجموعة النقط  $M(x, y, z)$  بحيث :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$  .

1) بين أن  $(S)$  هي الفلكة التي مركزها النقطة  $\Omega(1, 2, 3)$  و شعاعها 5 . 0.5

2) أ - بين أن  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$  واستنتج أن  $4y + 3z + 8 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$  . 1

ب - احسب  $d(\Omega, (ABC))$  ثم استنتج أن المستوى  $(ABC)$  مماس للفلكة  $(S)$  . 0.5

3) ليكن  $(\Delta)$  المستقيم المار من النقطة  $\Omega$  والعمودي على المستوى  $(ABC)$  .

أ - بين أن :  $\begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \\ z=3+3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$  هو تمثيل بارامتري للمستقيم  $(\Delta)$  . 0.5

ب - بين أن مثلث إحدائيات  $H$  نقطة تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  والمستوى  $(ABC)$  هو  $(1, -2, 0)$  . 0.25

ج - تحقق من أن  $H$  هي نقطة تماس المستوى  $(ABC)$  والفلكة  $(S)$  . 0.25

## التمرين الثاني (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $C$  المعادلة :  $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$  1

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  ، النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي أحاقها

على التوالي هي :  $a = 8i$  و  $b = 4\sqrt{3} - 4i$  و  $c = 2(4\sqrt{3} + 4i)$  .

ليكن  $z$  لحق نقطة  $M$  من المستوى و  $z'$  لحق النقطة  $M'$  صورة  $M$  بالدوران  $R$  الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{4\pi}{3}$  .

أ - بين أن  $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$  . 0.5

ب - تحقق من أن النقطة  $B$  هي صورة النقطة  $A$  بالدوران  $R$  . 0.25

ج - بين أن  $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  ثم اكتب العدد  $\frac{a-b}{c-b}$  على الشكل المثلي . 0.75

د - استنتج أن المثلث  $ABC$  متساوي الأضلاع . 0.5

## التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على ثماني كرات تحمل الأعداد : 1 و 1 و 1 و 1 و 2 و 2 و 2 و 2 و 3 و 3 (لا يمكن التمييز بينها باللمس) .

نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق .

1) ليكن  $A$  الحدث : " الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 " . 1.25

و  $B$  الحدث : " الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل العدد 3 " .

بين أن  $P(A) = \frac{3}{28}$  وأن  $P(B) = \frac{13}{28}$  .

2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

أ - حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي  $X$  . 0.25

ب - بين أن :  $P(X=1) = \frac{15}{28}$  . 0.75

ج - أعط قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  . 0.75

## التمرين الرابع (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{3u_n}{n}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  .

0.5 (1) بين أن :  $u_n > 0$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  .

0.75 (2) بين أن :  $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  .

0.5 (3) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية وأنها متقاربة .

0.75 (4) أ- بين بالترجع أن :  $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  .

0.5 ب- حدد نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

### التمرين الخامس (8 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$  .

0.25 (1) أ- تحقق من أن  $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  .

0.5 ب- بين أن :  $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  .

0.25 (2) أ- تحقق من أن  $\frac{3x^2 + 3x + 2}{x} > 0$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  .

0.5 ب- استنتج أن إشارة  $g'(x)$  هي إشارة  $x-1$  على  $]0, +\infty[$  .

0.5 (3) أ- بين أن الدالة  $g$  تناقصية على  $]0, 1[$  وأنها تزايدية على  $]1, +\infty[$  .

0.5 ب- استنتج أن  $g(x) > 0$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  (لاحظ أن  $g(1) > 0$ ) .

(II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$  .

ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (نأخذ  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$ ) .

1 (1) بين أن :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  ، ثم استنتج أن الدالة  $f$  تزايدية على  $]0, +\infty[$  .

0.5 (2) أ- بين أن  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$  ثم أول هذه النتيجة هندسيا .

0.75 ب- بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = 0$  ثم أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (نذكر أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ ) .

0.5 ج- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C)$  بجوار  $+\infty$  .

0.5 (3) بين أن  $y = 3(x - 1)$  هي معادلة للمستقيم المماس للمنحنى  $(C)$  في النقطة التي زوج إحداثياتها  $(1, 0)$  .

0.75 (4) أنشئ المستقيم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(C)$  (نقبل أن للمنحنى  $(C)$  نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها) .

1 (5) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن :  $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$  (ضع :  $u(x) = \frac{1}{x^2}$  و  $v(x) = \ln x$ ) .

0.5 ب- بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين  $(C)$  و  $(\Delta)$  و المستقيمين الذين معادلتاهما  $x = 1$  و  $x = e$

هي  $\left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{cm}^2$  .

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 4t + 2 \\ z = 3t + 3 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \quad \text{يعني}$$

و هذه النظمة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامترى للمستقيم  $(\Delta)$ .



$$\begin{cases} (ABC) : 4y + 3z + 8 = 0 \\ (\Delta) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3t + 3 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

نعلم أن  $H(\alpha, \beta, \gamma)$  هي نقطة تماس الفلكة  $(S)$  و المستوى  $(ABC)$ .

$$(1) \quad \overline{\Omega H} \perp \overline{(ABC)}$$

و نعلم كذلك أن (2)  $\overline{(\Delta)} \perp \overline{(ABC)}$  و (3)  $\overline{\Omega \epsilon(\Delta)}$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن  $(\Omega H) = (\Delta)$  يعني  $H \in (\Delta)$

و لتحديد إحداثيات النقطة  $H$  ننطلق من النظمة التالية :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4t + 2 \\ \gamma = 3t + 3 \\ 4\beta + 3\gamma + 8 = 0 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \quad \text{و هذه النظمة تكافئ}$$

نعوض قيم  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  في المعادلة الرابعة من النظمة نحصل على :

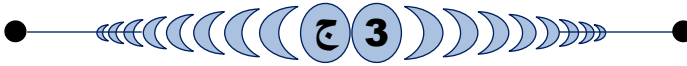
$$4(4t + 2) + 3(3t + 3) + 8 = 0$$

نحل هذه المعادلة البسيطة نحصل على :  $t = -1$

نعوض  $t$  بالعدد  $-1$  في المعادلات الثلاث الأولى نجد :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4(-1) + 2 = -2 \\ \gamma = 3(-1) + 3 = 0 \end{cases}$$

و بالتالي :  $H(1; -2; 0)$  هي نقطة تقاطع  $(\Delta)$  و المستوى  $(ABC)$ .



للتحقق من أن  $H(1; -2; 0)$  هي نقطة تماس المستوى  $(ABC)$  و الفلكة  $(S)$  يكفي أن نتحقق من أن مثلث إحداثيات النقطة  $H$  يحقق كلا من معادلتى المستوى  $(ABC)$  و الفلكة  $(S)$ .

$$\begin{cases} (\Delta) : 4y + 3z + 8 = 0 \\ (S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

يكفي إذن أن نعوض  $x$  و  $y$  و  $z$  على التوالي بالأعداد  $1$  و  $-2$  و  $0$

في معادلتى  $(ABC)$  و  $(S)$  و نرى هل تتحقق المتساويات.

$$1^2 + (-2)^2 + 0^2 - 2 \times 1 - 4(-2) - 6 \times 0 - 11 = 0$$

إذن :  $H \in (S)$

$$4(-2) + 3(0) + 8 = -8 + 8 = 0$$

و لدينا كذلك :  $H \in (ABC)$

و بالتالي :  $H$  هي نقطة تماس المستوى  $(ABC)$  و الفلكة  $(S)$ .

### التمرين الثاني :



$$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0 \quad \text{نحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة}$$

$$\Delta = (-8\sqrt{3})^2 - 4 \times 64 = -64 = (8i)^2 \quad \text{لدينا}$$

إذن : المعادلة تقبل الحلين العقديين  $z_1$  و  $z_2$  المعرفين بما يلي :

$$z_1 = \frac{8\sqrt{3} - 8i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$$

## أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2010

### التمرين الأول :



لدينا الفلكة  $(S)$  معرفة بمعادلتها الديكارية التالية :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$$

نغير شكل المعادلة بالطريقة التالية :

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) + (z^2 - 6z) - 11 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 - 11 = 14 \quad \text{يعني}$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25 \quad \text{يعني}$$

إذن  $(S)$  فلكة مركزها  $\Omega(1; 2; 3)$  و شعاعها  $R = 5$ .



لدينا :  $A(0; -2; 0)$  و  $B(1; 1; -4)$  و  $C(0; 1; -4)$ .

إذن :  $\overline{AB}(1; 3; -4)$  و  $\overline{AC}(0; 3; -4)$ .

$$\begin{aligned} \overline{AB} \wedge \overline{AC} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{و منه} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 0\vec{i} - (-4)\vec{j} + 3\vec{k} \\ &= 4\vec{j} + 3\vec{k} \end{aligned}$$

لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من المستوى  $(ABC)$ .

بما أن المتجهة  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  متجهة منظمية على المستوى  $(ABC)$ .

فإن : المتجهتان  $\overline{AM}$  و  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  متعامدتان.

$$\overline{AM} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = 0 \quad \text{يعني أن}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y + 2 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{يعني}$$

$$4y + 3z + 8 = 0 \quad \text{يعني} \quad 0x + 4(y + 2) + 3z = 0$$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$ .



لدينا :  $\Omega(1, 2, 3)$  و  $(ABC) : 4y + 3z + 8 = 0$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|0 + 8 + 9 + 8|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{إذن}$$

$$d(\Omega, (ABC)) = R \quad \text{نلاحظ أن}$$

إذن المستوى  $(ABC)$  مماس للفلكة  $(S)$  في النقطة  $H(\alpha, \beta, \gamma)$



علما أن المتجهة  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(0, 4, 3)$  منظمية على المستوى  $(ABC)$ .

لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من المستقيم  $(\Delta)$ .

بما أن  $(\Delta)$  مار من  $\Omega$  و عمودي على  $(ABC)$ .

فإن المتجهتان  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  و  $\overline{\Omega M}$  متجهتان مستقيمتان.

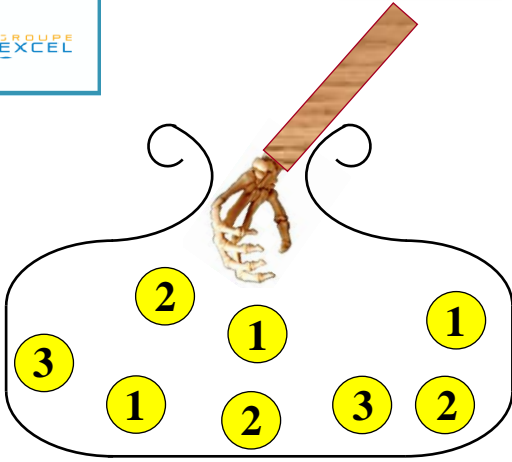
$$\text{يعني} \quad \overline{\Omega M} = t \vec{n} \quad (\exists t \in \mathbb{R})$$

$$(\Delta) : \begin{cases} x - 1 = 0t \\ y - 2 = 4t \\ z - 3 = 3t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} BA = BC \\ \widehat{ABC} = 60^\circ \end{cases} \text{ أو بتعبير آخر :}$$

و هذا يعني أن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين رأسه  $B$  و قياس الزاوية  $\widehat{B}$  هو  $60^\circ$  .  
و بالتالي :  $ABC$  مثلث متساوي الأضلاع .

### التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على 8 كرات فإنه توجد  $C_8^1$  إمكانية لسحب الكرة الأولى و توجد  $C_7^1$  إمكانية لسحب الكرة الثانية .

إذن هذه التجربة العشوائية تحتل  $C_8^1 \times C_7^1$  نتيجة ممكنة .

$$\text{يعني : } \text{card}(\Omega) = C_8^1 \times C_7^1 = 8 \times 7 = 56$$

بحيث :  $\Omega$  هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

للحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 لدينا :

$C_3^1$  إمكانية لسحب كرة أولى تحمل 2 في السحبة الأولى .

$C_2^1$  إمكانية لسحب كرة ثانية تحمل 2 في السحبة الثانية .

إذن احتمال الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 يساوي :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل 3 يمكن أن يتم عن طريق حالتين و هما :

**الحالة الأولى :** الحصول على الكرة الأولى تحمل 3 و الكرة الثانية تخالف 3

بـ  $C_2^1 \times C_7^1$  إمكانية .

**الحالة الثانية :** الحصول على الكرة الأولى مخالفة لـ 3 و الكرة الثانية تحمل 3

بـ  $C_6^1 \times C_2^1$  إمكانية .

إذن : احتمال الحصول على كرتين إحداهما على الأقل 3 يساوي :

$$p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_2^1 \times C_7^1 + C_6^1 \times C_2^1}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

2

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

عندما نسحب كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على خمس كرات تحمل أعدادا فردية و 3 كرات تحمل أعدادا زوجية . فإنه يُحتمل أن

نحصل على كرات كلها تحمل أعدادا فردية أو كرة واحدة تحمل عددا فرديا .

و يمكن ألا نحصل على أية كرة تحمل عددا فرديا .

2

$$\begin{cases} \text{aff}(A) = a = 8i \\ \text{aff}(B) = b = 4\sqrt{3} - 4i \\ \text{aff}(C) = c = 2(4\sqrt{3} + 4i) \\ \text{aff}(M) = z \\ \text{aff}(M') = z' \end{cases} \text{ لدينا :}$$

$$\mathcal{R}_0\left(\frac{4\pi}{3}\right) : (P) \mapsto (P) \quad \text{و لدينا الدوران } \mathcal{R} \text{ معرف بما يلي :}$$

$$M(z) \mapsto M'(z')$$

$$(z' - 0) = e^{\frac{i4\pi}{3}}(z - 0) \quad \text{إذن حسب التعريف العقدي للدوران } \mathcal{R}$$

$$\text{ننتقل من الكتابة : } \mathcal{R}(M) = M'$$

$$\text{يعني : } z' = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) z$$

$$\text{يعني : } z' = \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) z$$

$$\text{يعني : } z' = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) z$$

$$\text{يعني : } z' = \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$$

2

$$\text{لدينا : } \text{aff}(A) \times \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8i \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4i + 4\sqrt{3} = \text{aff}(B)$$

حصلنا إذن على العلاقة التالية :  $\text{aff}(A) = \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \text{aff}(B)$  و هي نفسها الكتابة العقديّة للدوران  $\mathcal{R}$

و من تلك الكتابة نستنتج أن :  $\mathcal{R}(A) = B$

2

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{8i - (4\sqrt{3} - 4i)}{2(4\sqrt{3} + 4i) - (4\sqrt{3} - 4i)} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{12i - 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 12i} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}i - 1)}{4\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}i - 1)(\sqrt{3}i - 1)}{(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3}i - 1)} = \frac{(\sqrt{3}i)^2 - 2(\sqrt{3}i) + 1^2}{(\sqrt{3}i)^2 - 1}$$

$$= \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{-2}{-4} + \frac{-2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\text{إذن : } \frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

2

$$\begin{cases} \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \text{ حصلنا على : } \frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ يعني :}$$

$$\begin{cases} BA = BC \\ (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \text{ يعني : } \begin{cases} |a-b| = |c-b| \\ (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

يعني :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{3u_n}{21 + u_n} > 0$

أي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > 0$

يعني أن العبارة  $(P_{n+1})$  عبارة صحيحة .

و بالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

**2**

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا  $u_n > 0$  إذن التعبير  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  مُعَرَّف (المقام يجب أن يخالف الصفر)

$$\text{لدينا : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3u_n}{21 + u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{3}{21 + u_n}$$

$$\text{إذن : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{21 + u_n}$$

نعلم أن :  $u_n > 0$  إذن :  $21 + u_n > 21$

$$\text{يعني : } \frac{1}{21 + u_n} < \frac{1}{21} \quad \text{يعني : } \frac{3}{21 + u_n} < \frac{3}{21}$$

$$\text{يعني : } \frac{3}{21 + u_n} < \frac{1}{7} \quad \text{يعني : } \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{7}$$

و بالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$

**3**

نعلم أن :  $\frac{1}{7} < 1$

نضرب هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعاً  $u_n$  نحصل على :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{7} u_n < u_n \quad (1)$$

و نعلم كذلك حسب السؤال (2) أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$  (2)

إذن من النتيجتين (1) و (2) نجد ما يلي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$  و بالتالي :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية تناقصية .

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 ( $u_n > 0$ ) فإنها متقاربة .

**4**

من أجل  $n = 0$  لدينا :  $u_0 = 1 \leq \left(\frac{1}{7}\right)^0$

إذن العبارة صحيحة من أجل  $n = 0$

نفترض أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

لدينا حسب السؤال (2) :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$

إذن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n \leq \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7}\right)^n$

يعني :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

إذن العبارة صحيحة من أجل  $(n + 1)$

و بالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

**4**

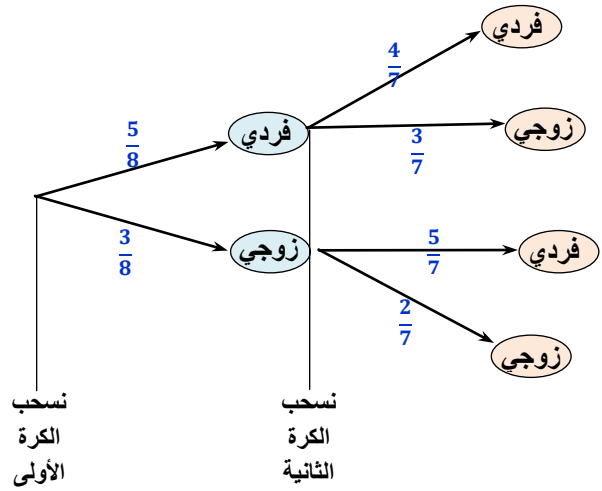
لدينا :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

و بما أن :  $\left(\frac{1}{7}\right)^n$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{7}$  و هو عدد موجب و أصغر من 1

إذن : القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي  $X$  هي : 0 أو 1 أو 2

أو بتعبير أجمل :  $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

للإجابة على الأسئلة الأخرى نستعين بشجرة الاحتمالات التالية و التي تمّ الحصول عليها انطلاقاً من التجربة العشوائية ( السحب العشوائي بالتتابع و بدون إحلال)



**2**

$p[X = 1]$  هو احتمال الحصول بالضبط على كرة تحمل عددا فرديا .

إذن حسب شجرة الاحتمالات السابقة :

$$p[X = 1] = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

**2**

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  التطبيق التالي :

$$P_X : \{0; 1; 2\} \mapsto [0; 1]$$

لدينا حسب السؤال (1) :  $p(A) = \frac{3}{28}$  إذن :  $p[X = 0] = \frac{3}{28}$

$$\text{و لدينا كذلك : } p[X = 2] = 1 - p[X = 0] - p[X = 1] = 1 - \frac{3}{28} - \frac{15}{28} = \frac{5}{14}$$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  هو التطبيق  $P_X$  المعروف

بما يلي :  $P_X : \{0; 1; 2\} \mapsto [0; 1]$

$$0 \mapsto p[X = 0] = \frac{3}{28}$$

$$1 \mapsto p[X = 1] = \frac{15}{28}$$

$$2 \mapsto p[X = 2] = \frac{5}{14}$$

**التمرين الرابع :**

**1**

نبرهن على صحة العبارة  $(P_n)$  التالية :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$  (1)

لدينا :  $u_0 = 1 > 0$  إذن العبارة  $(P_0)$  صحيحة .

نفترض أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

إذن :  $u_n$  كمية موجبة قطعاً .

و منه فإن الكميتان  $3u_n$  و  $u_n + 21$  موجبتان قطعاً كذلك .

إذن الكمية  $\frac{3u_n}{u_n + 21}$  موجبة قطعاً باعتبارها خارج كميتين موجبتين .



فإن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

و بالتالي :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة و تؤول على الصفر .  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

### التمرين الخامس :



ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  . لدينا :

$$(x-1)(3x^2+3x+2) = 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2 = 3x^3-x-2$$



ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  .

لدينا :  $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 3$  إذن :

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$



ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  . يعني :  $x > 0$

إذن :  $x > 0$  و  $3x^2 + 3x + 2 > 0$

ومنه :  $\frac{3x^2+3x+2}{x}$  موجبة قطعيا باعتبارها خارج كمتبتين موجبتين قطعيا .

و بالتالي :  $(\forall x > 0) ; \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$



ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  .

لدينا :  $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

و لقد علمنا من قبل أن :  $(\forall x > 0) ; \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$

إذن : إشارة  $g'(x)$  تتعلق فقط بإشارة  $(x-1)$  على المجال  $]0; +\infty[$  .



ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; 1]$  . إذن :  $x \leq 1$

يعني :  $(x-1) \leq 0$  و منه :  $g'(x) \leq 0$

يعني أن الدالة  $g$  تناقصية على المجال  $]0; 1]$  .

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]1; +\infty[$  . إذن :  $x \geq 1$

ومنه :  $(x-1) \geq 0$  يعني :  $g'(x) \geq 0$

يعني أن الدالة  $g$  تزايدية على المجال  $]1; +\infty[$  .



ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  . نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى :  $x \in ]0; 1]$  يعني :  $x \leq 1$

إذن :  $g(x) \geq g(1)$  ( لأن  $g$  تناقصية على  $]0; 1]$  )

و لدينا :  $g(1) > 0$  . إذن :  $\forall x \in ]0; 1]$  ;  $g(x) > 0$

الحالة الثانية :  $x \in [1; +\infty[$  يعني :  $x \geq 1$

إذن :  $g(x) \geq g(1)$  ( لأن  $g$  تزايدية على  $]1; +\infty[$  )

و لدينا :  $g(1) > 0$  . إذن :  $\forall x \in [1; +\infty[$  ;  $g(x) > 0$

من النتجتين (1) و (2) نستنتج أن :  $\forall x \in ]0; +\infty[$  ;  $g(x) > 0$



**1 II**

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  .

لدينا :  $f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$

إذن :  $f'(x) = 1 + \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2x(x - 1 + \ln x)}{x^4}$

$$= 1 + \frac{x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2x \ln x}{x^4}$$

$$= 1 + \frac{-x^2 + 3x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x^3 - x - 2 \ln x + 3}{x^3}$$

و بالتالي :  $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

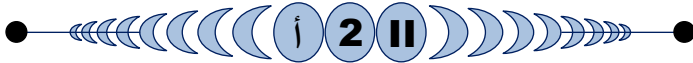
نعلم حسب السؤال (3 ب) :  $(\forall x > 0) ; g(x) > 0$

و لدينا :  $(\forall x > 0) ; x^3 > 0$

إذن :  $(\forall x > 0) ; \frac{g(x)}{x^3} > 0$

يعني :  $(\forall x > 0) ; f'(x) > 0$

و بالتالي :  $f$  دالة تزايدية قطعيا على المجال  $]0; +\infty[$  .



**2 II**

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}\right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 1 + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)\right)$$

$\begin{matrix} 0^+ & 0^+ & 0^+ \\ +\infty & +\infty & -\infty \end{matrix}$

$$= 0 - 1 + (+\infty)(1 - \infty - \infty)$$

$$= -1 + (+\infty)(+\infty) = -1 - \infty = -\infty$$

و بالتالي :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

و تأويل هذه النهاية هندسيا هو : " المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (محور الأرتايب) مقارب عمودي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار الصفر على اليمين



**2 II**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 1 + \ln x}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= 0(1 - 0 + 0) = 0$$



ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; 1]$  . إذن :  $x \leq 1$

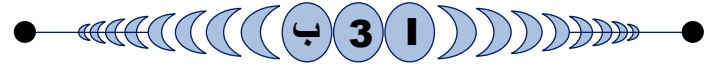
يعني :  $(x-1) \leq 0$  و منه :  $g'(x) \leq 0$

يعني أن الدالة  $g$  تناقصية على المجال  $]0; 1]$  .

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]1; +\infty[$  . إذن :  $x \geq 1$

ومنه :  $(x-1) \geq 0$  يعني :  $g'(x) \geq 0$

يعني أن الدالة  $g$  تزايدية على المجال  $]1; +\infty[$  .



**3 I**

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  . نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى :  $x \in ]0; 1]$  يعني :  $x \leq 1$

إذن :  $g(x) \geq g(1)$  ( لأن  $g$  تناقصية على  $]0; 1]$  )

**5 II**

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^e \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{u'} \times \underbrace{(\ln x)}_v dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv dx$$

$$= \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$= \frac{-1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$



**5 II**

لتكن  $\mathcal{A}$  مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى  $(\mathcal{C})$  و المستقيم  $(\Delta)$  و المستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = e$  و  $x = 1$ .  
نقيس المساحة  $\mathcal{A}$  باستعمال التكامل التالي:

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - (x+1)| dx = \int_1^e \left| \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right| dx$$

ولدينا:  $x \in [1, e]$  إذن: (1)  $x > 1$  و منه: (2)  $\ln x > 0$   
نجمع المتفاوتتين (1) و (2) طرفا بطرف نجد:  $x + \ln x > 1$   
يعني:  $\forall x \in [1, e]; x - 1 + \ln x > 0$   
و منه:  $\forall x \in [1, e]; \frac{x-1+\ln x}{x^2} > 0$   
أي:  $\forall x \in [1, e]; \left| \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right| = \frac{x-1+\ln x}{x^2}$

و بالتالي بالرجوع إلى آخر تعبير للمساحة  $\mathcal{A}$  نجد:

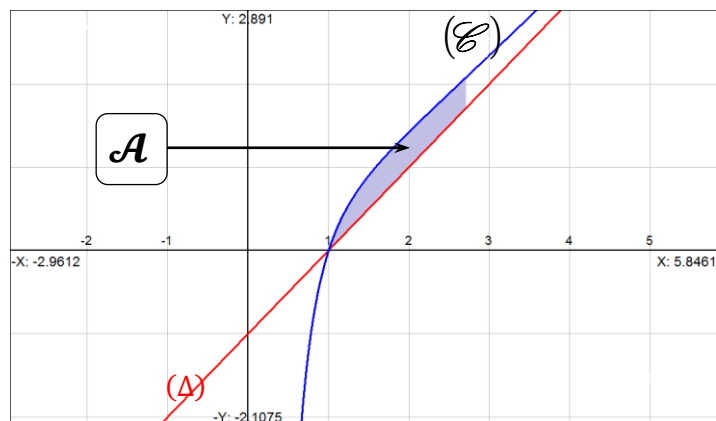
$$\mathcal{A} = \int_1^e \left| \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right| dx = \int_1^e \left( \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right) dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} dx - \int_1^e \frac{1}{x^2} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= [\ln x]_1^e - \left[ \frac{-1}{x} \right]_1^e + \left( 1 - \frac{2}{e} \right)$$

$$= 1 - \left( \frac{-1}{e} + 1 \right) + \left( 1 - \frac{2}{e} \right) = \left( 1 - \frac{2}{e} \right) \text{ unité}^2$$

$$= \left( 1 - \frac{1}{e} \right) (1 \text{ cm})^2 = \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \text{ cm}^2$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right)$$

$$= (+\infty) + 0 = +\infty$$

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  إذن:

**2 II**

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1+\ln x}{x^3} \right)$$

$$= 1 - 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= 1 + 0(1 - 0 + 0) = 1$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  إذن:

و لدينا كذلك:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right)$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right)$$

$$= -1 + 0 = -1$$

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -1$  إذن:

من النهايات (1) و (2) و (3) نستنتج أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $+\infty$ .

**3 II**

معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(\mathcal{C})$  في النقطة التي زوج إحداثياتها  $(1, 0)$   
تكتب على الشكل:  $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$   
لدينا:  $f'(1) = 3$  و  $f(1) = 0$   
إذن:  $(T): y = 3(x-1)$

