



التمرين الأول: (3 ن)

- نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(1,1,-1)$ و $B(0,1,-2)$ و $C(3,2,1)$ و الفلكة (S) التي معادلتها: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$
- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها يساوي $\sqrt{3}$. 1 0,50 ن
- بين أن: $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ و تحقق من أن: $x - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) 2 0,75 ن
- تحقق من أن: $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$ ثم بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها 1. 2 1,00 ن
- ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω العمودي على المستوى (ABC) . 3
- تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) . 3 0,25 ن
- بين أن مثلث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(2,0,0)$. 3 0,25 ن
- استنتج مركز الدائرة (Γ) . 3 0,25 ن



التمرين الثاني: (3 ن)

- حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة: $z^2 - 12z + 61 = 0$ 1 0,75 ن
- نعتبر المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي: a و b و c بحيث: $a = 6 - 5i$ و $b = 4 - 2i$ و $c = 2 + i$. 2
- أحسب $\frac{a-c}{b-c}$ و استنتج أن النقط A و B و C مستقيمية. 2 0,50 ن
- نعتبر الإزاحة T ذات المتجهة \vec{u} حيث لحق \vec{u} هو $(1 + 5i)$ 2 0,50 ن
- تحقق أن لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T هو $d = 3 + 6$ 2 0,50 ن
- بين أن: $\frac{d-c}{b-c} = -1 + i$ و أن: $\frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1 + i$ 2 0,75 ن
- استنتج قياسا للزاوية الموجهة (\vec{CB}, \vec{CD}) . 2 0,50 ن

التمرين الثالث: (3 ن)

- يحتوي كيس على ثماني ببيدقات: بيده واحدة تحمل العدد 0 و خمس ببيدقات تحمل العدد 1 و ببيدقتان تحملان العدد 2 (لا يمكن التمييز بينها باللمس).
- نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث ببيدقات من الكيس و نعتبر الأحداث التالية:
- A: "الحصول على ثلاث ببيدقات تحمل أعدادا مختلفة مثني مثني".
- B: "مجموع الأعداد التي تحملها الببيدقات المسحوبة يساوي 5".
- C: "مجموع الأعداد التي تحملها الببيدقات المسحوبة يساوي 4".
- بين أن: $p(A) = \frac{5}{28}$ و $p(B) = \frac{5}{56}$ و $p(C) = \frac{3}{8}$ 3,00 ن



التمرين الرابع : (3 ن)

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} ; (\forall n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 11 \end{cases}$$

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :



تحقق من أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$ 1 0,25 ن

بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 12$ أ 2 0,50 ن

بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعا . ب 2 0,50 ن

استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة . ج 2 0,25 ن

لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية بحيث : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = u_n - 12$ 3 ن

بين أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{10}{11}$ ثم أكتب v_n بدلالة n . أ 3 0,75 ن

بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ ثم أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ب 3 0,75 ن

التمرين الخامس : (8 ن)

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$ I

بين أن : $(x^2 - 1)$ و $2x^2 \ln x$ لهما نفس الإشارة على $]0; 1[$. 1 I 0,75 ن

ثم استنتج أن : $\forall x \in]0; 1[; g(x) \leq 0$

بين أن $(x^2 - 1)$ و $2x^2 \ln x$ لهما نفس الإشارة على $]1; +\infty[$ 2 I 0,75 ن

ثم استنتج أن : $\forall x \in]1; +\infty[; g(x) \geq 0$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = (x^2 - 1) \ln x$ II

و ليكن (\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة 3 cm^2)

بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و أول النتيجة هندسيا . أ 1 II 0,50 ن

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ب 1 II 1,00 ن

و استنتج أن المنحنى (\mathcal{C}) يقبل فرعا شلجيا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .

بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$; $\forall x \in]0; +\infty[$ (و أول هندسيا النتيجة $f'(1) = 0$) أ 2 II 1,25 ن

استنتج أن الدالة f تناقصية على المجال $]0; 1[$ و تزايدية على المجال $]1; +\infty[$. ب 2 II 0,50 ن

إعط جدول تغيرات الدالة f على $]0; +\infty[$ ثم بين أن : $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) \geq 0$. ج 2 II 0,50 ن

أنشئ المنحنى (\mathcal{C}) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . 3 II 1,00 ن

بين أن : $u : x \rightarrow \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية للدالة $v : x \rightarrow x^2 - 1$ على \mathbb{R} . أ 4 II 0,50 ن

باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن : $\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2)$ ب 4 II 1,00 ن

أحسب بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (\mathcal{C}) و محور الأفاصيل ج 4 II 0,25 ن

و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$.



التمرين الأول: (3 ن)

1) لنبين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها $r = \sqrt{3}$ **0,25 + 0,25**لدينا معادلة ديكارتية للفلكة (S) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$ ومنه (S): $x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 2z - 1 = 0$ إذن (S): $(x-1)^2 - 1 + (y-0)^2 + (z-1)^2 - 1 - 1 = 0$ أي (S): $(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{3})^2$ إذن (S): $(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 3$ المعادلة المختصرة للفلكة (S) و بالتالي مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,0,1)$ و شعاعها يساوي $r = \sqrt{3}$ 2) أ- < لنبين أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} - \vec{k}$ **0,5**لدينا: $C(3,2,1)$; $B(0,1,-2)$; $A(1,1,-1)$ لدينا: $\overline{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ ومنه: $\overline{AB}(0 - 1, 1 - 1, -2 + 1)$ إذن: $\overline{AB}(-1, 0, -1)$ و $\overline{AC}(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$ ومنه: $\overline{AC}(3 - 1, 2 - 1, 1 + 1)$ إذن: $\overline{AC}(2, 1, 2)$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ إذن:}$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (0+1)\vec{i} - (-2+2)\vec{j} + (-1-0)\vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

و بالتالي: $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} - \vec{k}$ < نستنتج أن $x - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) **0,25**طريقة 1: لدينا $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)إذن: $(ABC): 1x + 0y - 1z + d = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)و بما أن $A \in (ABC)$ فإن مثلث إحداثياتها يحقق المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC).

$$A(1,1,-1) \in (ABC) \Leftrightarrow 1 - (-1) + d = 0 \text{ إذن } 2 + d = 0 \text{ أي } d = -2$$

وبالتالي $x - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).طريقة 2: لدينا $\vec{n} = \overline{AB} \wedge \overline{AC}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

$$M(x,y,z) \in (ABC) : \vec{n} \cdot \overline{AM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0 \text{ إذن:}$$

$$M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow 1(x-1) + 0(y-1) - 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 - z - 1 = 0$$

و بالتالي: $x - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ب- لنتحقق من أن $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$ ثم لنبين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $r=1$:

لدينا $x-z-2=0$ هي معادلة ديكرتية للمستوى (ABC) و $\Omega(1,0,1)$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1 \times 1 + 0 - 1 \times 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 + 0 - 1 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ ومنه } d(\Omega, (ABC)) = \frac{|ax_{\Omega} + by_{\Omega} + cz_{\Omega} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

إذن $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$ و $r = \sqrt{3}$ وبما أن $d(\Omega, (ABC)) < r$ فإن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق

$$\text{دائرة } (\Gamma) \text{ شعاعها } r = \sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 1 \text{ . } R = \sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 1 \text{ شعاعها } 1$$

3) أ- لنبين أن (Δ) تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على المستوى (ABC) :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

بما أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) فإن $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} - \vec{k}$ المتجهة المنظمة على (ABC) هي

متجهة موجهة للمستقيم (Δ) و $\Omega \in (\Delta)$

$$\begin{cases} x-1=t \\ y-0=0 \\ z-1=-t \end{cases} \text{ إذن } M(x,y,z) \in (\Delta) \text{ تكافئ أن } \begin{cases} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{cases} = t \overline{AB} \wedge \overline{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ و بالتالي: } M \in (\Delta) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \overline{\Omega M} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = t \overline{AB} \wedge \overline{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{تمثيل بارامتري للمستقيم } (\Delta) \text{ . } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ إذن } 0,25$$

ب- لنبين أن مثلث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(2;0;0)$: 0,25

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \\ 1+t-1+t-2=0 \end{cases} \text{ ومنه } (t \in \mathbb{R}) \text{ نحل تحليليا النظمة: } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \\ x - z - 2 = 0 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = 1+1=2 \\ y = 0 \\ z = 1-1=0 \\ t = 1 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \\ t = 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ يعني } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \\ 2t = 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ يعني } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \\ 2t - 2 = 0 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

و بالتالي مثلث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(2;0;0)$.

ج- لنستنتج مركز الدائرة (Γ) : 0,25

☆ $H(2;0;0)$ نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هي المسقط العمودي للنقطة Ω مركز الفلكة (S)

و بما أن الفلكة (S) تقطع المستوى (ABC) وفق دائرة فإن $H(2;0;0)$ هي مركز الدائرة (Γ) .



التمرين الثاني: (3 ن)

1) لنحل في \mathbb{C} مجموعة الأعداد العقدية المعادلة: $z^2 - 12z + 61 = 0$ لدينا: $a=1; b=-12; c=61$ و $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 61 = 144 - 244 = -100$ **0,25**بما أن $\Delta \neq 0$ فإن المعادلة تقبل حلين مترافقين

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{12 - 10i}{2 \times 1} = \frac{2(6 - 5i)}{2} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{12 + 10i}{2 \times 1} = \frac{2(6 + 5i)}{2}$$

و بالتالي: $z_1 = 6 + 5i$ و $z_2 = 6 - 5i$ إذن: $S = \{6 + 5i, 6 - 5i\}$ **0,25 + 0,25**2) أ- لنحسب $\frac{a-c}{b-c}$ و لنستنتج أن النقط A و B و C مستقيمية: **0,25 + 0,25**لدينا $\frac{a-c}{b-c} = \frac{6-5i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{4-6i}{2-3i} = \frac{2(2-3i)}{2-3i} = 2$ و بما أن $\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية.ب- لنتحقق من أن لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}(1+5i)$ هو $d = 3+6i$:

$$\text{لدينا } T(C) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \vec{u} \Leftrightarrow d - c = 1 + 5i \Leftrightarrow d = 1 + 5i + c = 1 + 5i + 2 + i = 3 + 6i$$

و بالتالي لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}(1+5i)$ هو $d = 3+6i$. **0,25 + 0,25**ج- لنبين أن: $\frac{d-c}{b-c} = -1+i$ **0,5**

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{1+5i}{2-3i} = \frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+10i-15}{2^2+3^2} = \frac{-13+13i}{13} = \frac{13(-1+i)}{13}$$

$$\text{و منه } \frac{d-c}{b-c} = -1+i$$

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{1+5i}{2-3i} = \frac{(1+5i)(-1+i)}{(2-3i)(-1+i)} = \frac{(1+5i)(-1+i)}{-2+2i+3i+3} = \frac{(1+5i)(-1+i)}{1+5i} = -1+i$$

لنبين أن $\frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$: **0,25**

$$\star \text{ لدينا } \frac{d-c}{b-c} = -1+i \text{ ومنه } \left| \frac{d-c}{b-c} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{و } \sin(\arg(-1+i)) = \frac{\text{Im}(-1+i)}{|-1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \cos(\arg(-1+i)) = \frac{\text{Re}(-1+i)}{|-1+i|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

إذن $\arg(-1+i) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$ و بالتالي $\frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$.د- لنستنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$: **0,25 + 0,25**

$$\left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD} \right) = \frac{3\pi}{4} [2\pi] \text{ و بالتالي } \left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD} \right) = \arg\left(\frac{d-c}{b-c}\right) = \arg(-1+i)$$



شعبة العلوم التجريبية بمسالكها و شعبة العلوم والتكنولوجيا بمسلكيها

المعامل: 7

مادة الرياضيات مدة الانجاز: 3 ساعات

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

التمرين الثالث: (3 ن)

نسحب عشوائيا تانيا ثلاث بيدات من كيس يضم ثمان بيدات

2	2	1	1	1	1	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---

$$(1) \text{ لنبين أن } p(A) = \frac{5}{28}$$

A: " نحصل على ثلاث بيدات تحمل أرقاما مختلفة مثتى مثتى " : {0;1;2}

0,5 + 0,5

$$p(A) = \frac{5}{28} \text{ و بالتالي } p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_1^1 \times C_5^1 \times C_2^1}{C_8^3} = \frac{1 \times 5 \times 2}{56} = \frac{10}{56}$$

$$(2) \text{ لنبين أن } p(B) = \frac{5}{56}$$

B: " نحصل على ثلاث بيدات تحمل أرقاما مجموعها يساوي 5 " : {1;2;2}

0,5 + 0,5

$$p(B) = \frac{5}{56} \text{ و بالتالي } p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_2^2}{C_8^3} = \frac{5 \times 1}{56}$$

$$(3) \text{ لنبين أن } p(C) = \frac{3}{8}$$

C: " نحصل على ثلاث بيدات تحمل أرقاما مجموعها يساوي 4 " : {0;2;2} أو {1;1;2}

0,5 + 0,5

$$p(C) = \frac{3}{8} \text{ و بالتالي } p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_1^1 \times C_2^2 + C_5^2 \times C_2^1}{C_8^3} = \frac{1 + 10 \times 2}{56} = \frac{21}{56}$$

التمرين الرابع: (3 ن)

(1) نتحقق من أن: $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$ لكل n من \mathbb{N} **0,25**

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$ وبالتالي $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10u_n + 12 - 132}{11} = \frac{10u_n - 120}{11}$

(2) أ- لنبين بالترجع أن: $u_n < 12$ لكل n من \mathbb{N} **0,5**

☆ نتحقق من أن $u_0 < 12$: لدينا $u_0 = 11 < 12$ إذن $u_0 < 12$ ①

☆ نفترض أن $u_n < 12$ و نبين أن $u_{n+1} < 12$:

لدينا حسب فرضية الترجع $u_n < 12$ ومنه $u_n - 12 < 0$ و $\frac{10}{11} > 0$ إذن $\frac{10}{11}(u_n - 12) < 0$

أي $u_{n+1} - 12 < 0$ لكل n من \mathbb{N} ② من ① و ② نستنتج أن $u_n < 12$ لكل n من \mathbb{N} .

ب- لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا n : **0,5**

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - u_n = \frac{10u_n + 12 - 11u_n}{11} = \frac{1}{11}(12 - u_n)$

لدينا $u_n < 12$ لكل n من \mathbb{N} ومنه $0 < 12 - u_n$ و $11 > 0$ إذن لكل n من \mathbb{N} : $\frac{1}{11}(12 - u_n) > 0$

أي $u_{n+1} - u_n > 0$ لكل n من \mathbb{N} وبالتالي (u_n) تزايدية قطعا n .

ج- نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة: **0,25**

لدينا مما سبق أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا n ومكبورة بالعدد 12 إذن المتتالية (u_n) متقاربة.

(3) أ- لنبين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{10}{11}$: **0,25**

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12) = \frac{10}{11}v_n$ و $v_n = u_n - 12$ إذن $v_{n+1} = \frac{10}{11}v_n$ وبالتالي المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{10}{11}$.

لنكتب v_n بدلالة n :

لدينا $v_0 = u_0 - 12 = 11 - 12 = -1$ و $v_n = v_0 \times q^n = -1 \times \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N} . **0,25**

ب- ☆ لنبين أن $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N} : **0,25**

لدينا $v_n = u_n - 12$ ومنه $u_n = v_n + 12$ و $v_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N}

إذن $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N} .

☆ لنحسب نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ و $-1 < \frac{10}{11} < 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{11}\right)^n = 0$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12$ **0,25**



التمرين الخامس: (8 ن)

- I-1) \curvearrowright لنبين أن: $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0; 1[$: **0,25 + 0,25**
- لدينا $0 < x < 1$ و منه $0 < x^2 < 1$ إذن $-1 < x^2 - 1 < 0$ و بالتالي إشارة $x^2 - 1$ سالبة على المجال $]0; 1[$. ①
- وإشارة $2x^2 \ln(x)$ هي إشارة $\ln(x)$ لأن لكل x من $]0; 1[$: $2x^2 > 0$ و $\ln(x) < 0$ على المجال $]0; 1[$ و بالتالي إشارة $2x^2 \ln(x)$ سالبة على المجال $]0; 1[$. ②
- إذن $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0; 1[$.

- \curvearrowright لنستنتج أن $g(x) \leq 0$ لكل x من $]0; 1[$: **0,25**
- من ① و ② نستنتج أن إشارة $x^2 - 1 + 2x^2 \ln(x)$ سالبة على المجال $]0; 1[$ أي g سالبة على المجال $]0; 1[$ (لأن مجموع دالتين سالبتين $x \mapsto x^2 - 1$ و $x \mapsto 2x^2 \ln(x)$ هي دالة سالبة) و $g(1) = 0$
- إذن نستنتج أن $g(x) \leq 0$ لكل x من $]0; 1[$.

- 2) \curvearrowright لنبين أن: $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]1; +\infty[$: **0,25 + 0,25**
- لدينا $x > 1$ و منه $x^2 > 1$ إذن $x^2 - 1 > 0$ و بالتالي إشارة $x^2 - 1$ موجبة على المجال $]1; +\infty[$. ③
- وإشارة $2x^2 \ln(x)$ هي إشارة $\ln(x)$ لأن لكل x من $]1; +\infty[$: $2x^2 > 0$ و $\ln(x) > 0$ على المجال $]1; +\infty[$ و بالتالي إشارة $2x^2 \ln(x)$ موجبة على المجال $]1; +\infty[$. ④
- إذن $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]1; +\infty[$.

- \curvearrowright لنستنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $]1; +\infty[$: **0,25**
- من ③ و ④ نستنتج أن إشارة $x^2 - 1 + 2x^2 \ln(x)$ موجبة على المجال $]1; +\infty[$ أي g موجبة على المجال $]1; +\infty[$ (لأن مجموع دالتين موجبتين $x \mapsto x^2 - 1$ و $x \mapsto 2x^2 \ln(x)$ هي دالة موجبة) و $g(1) = 0$
- إذن نستنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $]1; +\infty[$.

(1II) أ- لنبين أن: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ ولنؤول النتيجة مبيانيا: $0,25 + 0,25$

لدينا $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - 1) = -1$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ إذن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - 1) \ln(x) = (-1) \times (-\infty)$ وبالتالي $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

و منه نستنتج أن (C) منحنى الدالة f يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$.

ب- لنحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $0,25$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) \ln(x) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$

وبالتالي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب- لنبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و لنستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا بجوار $+\infty$: $0,25 + 0,5$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) \ln(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

وبالتالي $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ومنه نستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأرتايب بجوار $+\infty$ (2) -

لنبين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$: 1

لدينا لكل x من $]0; +\infty[$: $f(x) = (x^2 - 1) \ln(x)$

ومنه $f'(x) = (x^2 - 1)' \ln(x) + (x^2 - 1)(\ln(x))' = 2x \ln(x) + (x^2 - 1) \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x^2 - 1 + 2x^2 \ln(x)}{x}$

و $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln(x)$ وبالتالي $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$.

لنؤول هندسيا النتيجة $f'(1) = 0$: $0,25$

لدينا $f'(1) = 0$ و منه يقبل المنحنى (C) مماسا أفقيا في النقطة $A(1, 0)$

ب- لنستنتج أن الدالة f تناقصية على المجال $]0, 1[$ و تزايدية على المجال $[1, +\infty[$: $0,25 + 0,25$

لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$ إذن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ لكل x من $]0; +\infty[$:

☆ إذا كان $x \in]0, 1[$ فإن $g(x) \leq 0$ أي $f'(x) \leq 0$ و بالتالي f تناقصية على المجال $]0, 1[$.

☆ إذا كان $x \in [1, +\infty[$ فإن $g(x) \geq 0$ أي $f'(x) \geq 0$ و بالتالي f تزايدية على المجال $[1, +\infty[$.

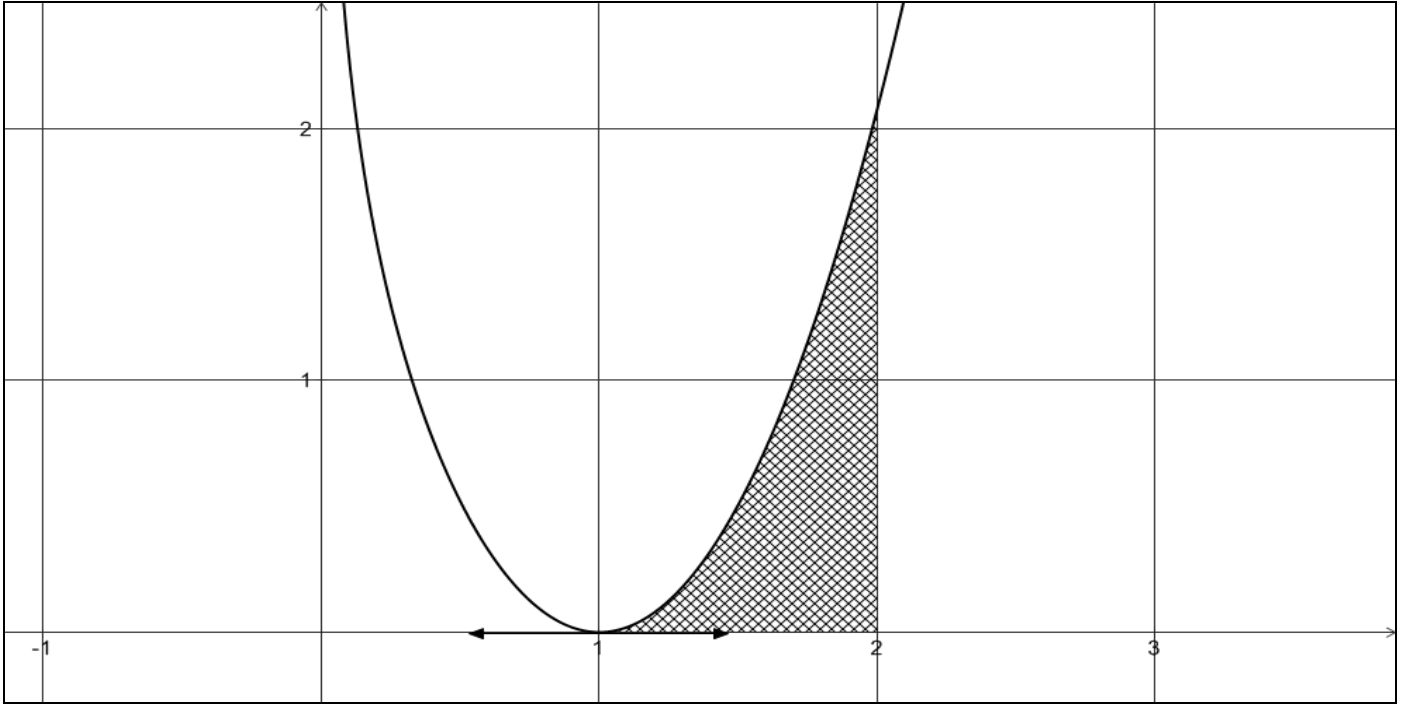
ج- لننجز جدول تغيرات الدالة f : $0,25$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

لنبين أن $f(x) \geq 0$ لكل x من $]0; +\infty[$: $0,25$

لدينا 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة f عند $x = 1$ إذن $f(x) \geq 0$ لكل x من $]0; +\infty[$.

(3) لنشئ (C) منحنى الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



(4) أ- لنبين أن $u: x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2 - 1$ على \mathbb{R} : $0, 5$

لدينا $x \mapsto x^3 - 1$ دالة متصلة على \mathbb{R} لأنها دالة حدودية و $u'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)' = \frac{3x^2}{3} - 1 = x^2 - 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$;

إذن $u: x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2 - 1$ على \mathbb{R} .

ب- لنبين باستعمال الكاملة بالأجزاء أن: $\int_1^2 (x^2 - 1) \ln(x) dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ln(2))$ **1**

$$\begin{cases} u(x) = \frac{x^3}{3} - x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} u'(x) = x^2 - 1 \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$$

$$\int_1^2 (x^2 - 1) \ln(x) dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \left(\frac{1}{x} \right) dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^2 - 1 \right) dx$$

$$\int_1^2 (x^2 - 1) \ln(x) dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln(x) \right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{9} - x \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2 \right) \ln(2) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \ln(1) - \left(\frac{8}{9} - 2 - \frac{1}{9} + 1 \right)$$

$$\int_1^2 (x^2 - 1) \ln(x) dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ln(2)) \text{ و بالتالي } \int_1^2 (x^2 - 1) \ln(x) dx = \frac{2\ln(2)}{3} - 0 + \frac{2}{9}$$

ج- لنحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين

$$1u.a = 9cm^2 : x=2 \text{ و } x=1 \text{ معادلتهما } 0,25$$

$$S = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln(x) dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ln(2)) \times 9 \text{ لدينا و بالتالي } S = 2(1 + 3\ln(2)) cm^2$$