



التمرين الأول: (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(-3,0,0)$

و $B(0,0,-3)$ و $C(0,2,-2)$ و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها هو 3

بين أن: $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ 1 1,25 ن

ثم استنتج أن معادلة ديكرتية للمستوى (ABC) 1 0,75 ن

أحسب $d(\Omega, (ABC))$ و استنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) 2 0,75 ن

ليكن (D) المستقيم المار من Ω و العمودي على (ABC) 2 0,50 ن

بين أن: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$ تمثيل بارامتري للمستقيم (D) 2 0,50 ن

بين أن مثلث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S) هو $(-1,2,-1)$ 2 0,50 ن

التمرين الثاني: (3 ن)

نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v}) النقط A و B و C التي 1 0,75 ن

الحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث: $a = (2 - i)$ و $b = (6 - 7i)$ و $c = (8 + 3i)$

بين أن: $\frac{c-a}{b-a} = i$ 1 0,75 ن

استنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A 1 0,75 ن

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق M' صورة M بالدوران \mathcal{R} الذي مركزه النقطة 2

Ω منتصف $[BC]$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

تحقق من أن لحق النقطة Ω هو $\omega = (7 - 2i)$ 2 0,50 ن

بين أن: $z' = -iz + 9 + 5i$ 2 0,75 ن

بين أن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران \mathcal{R} 2 0,25 ن

التمرين الثالث: (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} ; (\forall n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 3 \end{cases}$

بين بالترجع أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$ 1 0,50 ن

نضع: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ 2

تحقق من أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$ و استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - u_n > 0$ 2 0,50 ن

بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$ 2 0,50 ن

- 1,00 ن **3** **أ** بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و اكتب v_n بدلالة n .
- 0,50 ن **3** **ب** بين أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

التمرين الرابع : (3 ن)

يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء و أربع كرات بيضاء و ثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء هو $\frac{1}{22}$ **1** 1,00 ن

بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون هو $\frac{3}{44}$ **2** 1,00 ن

بين أن احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو $\frac{37}{44}$ **3** 1,00 ن

التمرين الخامس : (8 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

و (\mathcal{E}) المنحنى الممثل لـ f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = -f(x)$ و استنتج أن O مركز تماثل المنحنى (\mathcal{E}) . **1** 0,75 ن

تحقق من أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$ **2** 0,50 ن

(يستحسن استعمال هذه الصيغة لـ $f(x)$ لمعالجة الأسئلة الموالية)

بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ و تحقق أن : $f'(0) = \frac{3}{2}$ **3** 1,25 ن

بين أن الدالة f تزايدية على \mathbb{R} . **3** 0,50 ن

بين أن $y = \frac{3}{2}x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (\mathcal{E}) في النقطة O . **3** 0,50 ن

بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ **4** 0,50 ن

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 1))$ و استنتج أن $y = x + 1$: (D) مقارب لـ (\mathcal{E}) بجوار $+\infty$ **4** 0,50 ن

بين أن المنحنى (\mathcal{E}) يوجد تحت المستقيم (D) . **4** 0,25 ن

أنشئ المستقيمين (D) و (T) و المنحنى (\mathcal{E}) (نذكر أن O مركز تماثل (\mathcal{E})) . **5** 1,50 ن

بين أن الدالة : $H : x \rightarrow x - \ln(e^x + 1)$ دالة أصلية للدالة $h : x \rightarrow \frac{1}{e^x + 1}$ على \mathbb{R} **6** 0,75 ن

استنتج أن : $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx = \ln 4 - \ln 3$ **6** 0,50 ن

أحسب مساحة حيز المستوى المحصور بين (\mathcal{E}) و (D) و المستقيمين اللذين معادلتهما **6** 0,50 ن

على التوالي $x = 0$ و $x = \ln 2$.



أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2012

التمرين الأول :

1 أ

$$\begin{cases} \overline{AB}(3,0,-3) \\ \overline{AC}(3,2,-2) \end{cases} \text{ : إذن } \begin{cases} A(-3,0,0) \\ B(0,0,-3) \\ C(0,2,-2) \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} \wedge \overline{AC} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ : ومنه :} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & | & 3 \\ -3 & -2 & | & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 3 & | & 3 \\ 0 & 2 & | & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & -2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} \end{aligned}$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = (6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}) \text{ : إذن}$$

و نعلم أن المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ متجهة منظمية على (ABC) .

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

فإن المتجهتان \overline{AM} و $(\overline{AB} \wedge \overline{AC})$ متعامدتان.

$$\overline{AM} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = 0 \text{ : يعني}$$

$$\begin{pmatrix} x+3 \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \text{ : يعني}$$

$$6(x+3) - 3y + 6z = 0 \text{ : يعني}$$

$$2x - y + 2z + 6 = 0 \text{ : يعني}$$

و هذه الكتابة الأخيرة هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

1 ب

$$\begin{cases} (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \\ \Omega(1,1,1) \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 1 - 1 + 2 \times 1 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 \text{ : إذن}$$

نلاحظ إذن أن $d(\Omega, (ABC)) = 3 = \text{Rayon}(\mathcal{S})$

إذن : المستوى (ABC) مماس للكرة (\mathcal{S}) في نقطة $H(\alpha, \beta, \gamma)$.

2 أ

$$\begin{cases} (D) \perp (ABC) \\ \Omega \in (D) \end{cases} \text{ لدينا . لتكن نقطة من المستقيم } (D) \text{ : } M(x, y, z)$$

بما أن المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

فإن المتجهتان $\overline{\Omega M}$ و $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ مستقيمتان.

$$\text{يعني : } (\exists \theta \in \mathbb{R}) ; \overline{\Omega M} = \theta (\overline{AB} \wedge \overline{AC})$$

$$\text{يعني : } (\exists \theta \in \mathbb{R}) ; \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{يعني : } (D) : \begin{cases} x-1 = 6\theta \\ y-1 = -3\theta \\ z-1 = 6\theta \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R})$$



$$(D) : \begin{cases} x = 6\theta + 1 \\ y = -3\theta + 1 \\ z = 6\theta + 1 \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R}) \text{ : يعني}$$

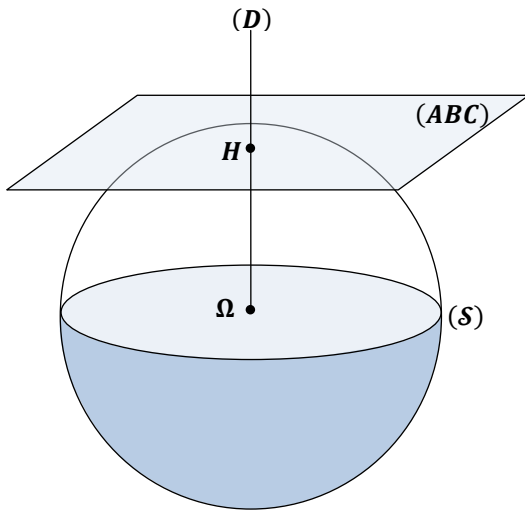
$$(D) : \begin{cases} x = 2(3\theta) + 1 \\ y = -(3\theta) + 1 \\ z = 2(3\theta) + 1 \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R}) \text{ : يعني}$$

$$(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \text{ : نضع } 3\theta = t \text{ نحصل على}$$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامترى للمستقيم (D) .

2 ب

في هذا السؤال سوف نستعمل التمثيل البارامترى للمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) . و نستعين بالشكل التالي :



بما أن المستوى (ABC) مماس لـ (\mathcal{S}) في H . فإن $(\Omega H) \perp (ABC)$

و نعلم أن $(D) \perp (ABC)$ (1)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن $(\Omega H) \parallel (D)$

و بما أن Ω نقطة مشتركة بين المستقيمين (ΩH) و (D) .

فإن المستقيمان (D) و (ΩH) منطبقان . يعني $H \in (D)$ (3)

$$\begin{cases} H \in (D) \\ H \in (ABC) \end{cases} \text{ حصلنا إذن على ما يلي :}$$

$$(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \text{ : لدينا}$$

$$\begin{cases} H(\alpha, \beta, \gamma) \\ (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases} \text{ : لدينا كذلك}$$

بما أن $H(\alpha, \beta, \gamma)$ نقطة مشتركة بين المستقيم (D) و المستوى (ABC) .

فإن المثلث (α, β, γ) يحقق كلاً من التمثيل البارامترى للمستقيم (D)

و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) .

$$(\exists t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} \alpha = 2t + 1 \\ \beta = -t + 1 \\ \gamma = 2t + 1 \\ 2\alpha - \beta + 2\gamma + 6 = 0 \end{cases} \text{ : إذن}$$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$2(2t + 1) - (-t + 1) + 2(2t + 1) + 6 = 0$$

$$\text{يعني : } 4t + t + 4t + 9 = 0 \text{ : إذن } t = -1$$

نعوض t بقيمته -1 في المعادلات الثلاث الأولى نحصل على :

$$\begin{cases} \alpha = 2(-1) + 1 = -1 \\ \beta = -(-1) + 1 = 2 \\ \gamma = 2(-1) + 1 = -1 \end{cases}$$



و بالتالي : $H(-1, 2, -1)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S)

التمرين الثاني :

1 أ

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } \frac{c-a}{b-a} &= \frac{(8+3i)-(2-i)}{(6-7i)-(2-i)} = \frac{6+4i}{4-6i} = \frac{3+2i}{2-3i} \\ &= \frac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{6+13i-6}{2^2-(3i)^2} = \frac{13i}{4+9} = \frac{13i}{13} = i \end{aligned}$$

$$\text{و بالتالي : } (*) \quad \frac{c-a}{b-a} = i$$

1 ب

$$\begin{cases} \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = |i| & \text{لدينا : } \frac{c-a}{b-a} = i \text{ إذن :} \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(i) [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} |c-a| = |b-a| & \text{يعني : } \begin{cases} \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\ \left(\overline{AB}; \overline{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} AC = AB \\ \left(\overline{AB}; \overline{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ يعني :}$$

و بالتالي ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في نفس النقطة A .

2 أ

$$\text{لدينا } \Omega \text{ منتصف القطعة } [BC] \text{ . إذن : } \frac{\text{aff}(B) + \text{aff}(C)}{2}$$

$$\text{يعني : } \frac{\text{aff}(\Omega)}{2} = \frac{(6-7i) + (8+3i)}{2} = (7-2i) = \omega$$

2 ب

$$\mathcal{R}_\Omega\left(\frac{-\pi}{2}\right) : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P})$$

$$M(z) \mapsto M'(z')$$

و ننطلق من الكتابة التالية : $\mathcal{R}(M) = M'$

$$\Leftrightarrow (z' - \omega) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z - \omega)$$

$$\Leftrightarrow z' - (7-2i) = \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)(z - 7 + 2i)$$

$$\Leftrightarrow z' - (7-2i) = (-i)(z - 7 + 2i)$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz + 7i + 2 + 7 - 2i$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz + 5i + 9$$

و هذه الكتابة الأخيرة تُعَبِّرُ عن الكتابة العقدية للدوران \mathcal{R} .

و بذلك يصبح الدوران \mathcal{R} مُعَرَّفَ بما يلي :

$$\mathcal{R}_\Omega\left(\frac{-\pi}{2}\right) : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P})$$

$$M(z) \mapsto M'(-iz + 5i + 9)$$

2 ج

يكفي أن نبرهن على أن : $\text{aff}(C) = -i \text{aff}(A) + 5i + 9$

لدينا حسب المعطيات : $\text{aff}(A) = a = (2-i)$

إذن : $-i \text{aff}(A) + 5i + 9 = -i(2-i) + 5i + 9$

$$= -2i - 1 + 5i + 9 = 3i + 8 = \text{aff}(C)$$

حصلنا إذن على : $-i \text{aff}(A) + 5i + 9 = \text{aff}(C)$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران \mathcal{R} نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = C$

التمرين الثالث :

1

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 3 > 1$. إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن $n \in \mathbb{N}$ نفترض أن : $u_n > 1$.

نحتاج إلى أن نبرهن على أن : $u_{n+1} > 1$

و عادة ما ننطلق من $u_{n+1} > 1$ لكي نحدد العبارة التي سننطلق منها

باستعمال المسار العكسي و هو ما سوف أعرضه الآن :

$$\begin{aligned} \text{نحتاج إلى : } u_{n+1} > 1 \\ \text{يعني نحتاج إلى : } \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} > 1 \end{aligned}$$

$$\text{يعني نحتاج إلى : } 4u_n + 3 > 3u_n + 4$$

$$\text{يعني نحتاج إلى : } u_n > 1$$

و هذه المتفاوتة متوفرة لدينا حسب الافتراض

إذن تمكنا من إيجاد المسار العكسي للبرهان .

و البرهان الذي يجب كتابته على ورقة التحرير هو التالي :

لدينا حسب الافتراض : $u_n > 1$

إذن : $4u_n - 3u_n > 4 - 3$ يعني : $4u_n + 3 > 3u_n + 4$

$$\text{يعني : } \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} > 1 \text{ يعني : } u_{n+1} > 1$$

أي أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

خلاصة : حصلنا على النتائج التالية : $\left\{ \begin{array}{l} (P_0) \text{ est vraie} \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{array} \right.$

إذن حسب مبدأ التراجع : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$

2 أ

$$\text{ليكن : } (n \in \mathbb{N}) \text{ . لدينا : } 1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

$$= \frac{u_n + 1}{u_n + 1} - \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{2}{u_n + 1}$$

$$\text{إذن : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$$

و نعلم حسب السؤال (1) أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + 1 > 2 > 0$

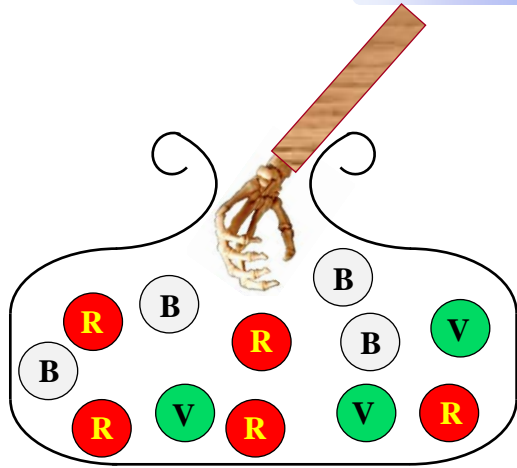
$$\text{يعني : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_n + 1} > 0$$

$$\text{يعني : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{2}{u_n + 1} > 0$$

$$\text{يعني : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n > 0$$



التمرين الرابع :



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من كيس يحتوي على 12 كرة فإن التجربة تُحتمل C_{12}^3 نتيجة ممكنة .
يعني : $card(\Omega) = C_{12}^3 = 220$. بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

$$p \left(\begin{array}{l} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right) = \frac{card \left(\begin{array}{l} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right)}{card(\Omega)} = \frac{C_5^3}{220} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

2

$$p \left(\begin{array}{l} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات من} \\ \text{نفس اللون} \end{array} \right) = p \left(\begin{array}{l} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{l} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{l} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right)$$

$$= \frac{card \left(\begin{array}{l} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right)}{card(\Omega)} + \frac{card \left(\begin{array}{l} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right)}{card(\Omega)} + \frac{card \left(\begin{array}{l} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_5^3}{220} + \frac{C_5^3}{220} + \frac{C_2^3}{220} = \frac{10}{220} + \frac{10}{220} + \frac{1}{220} = \frac{21}{220} = \frac{3}{44}$$

3

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :
الطريقة الأولى :

$$p \left(\begin{array}{l} \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right) = p \left(\begin{array}{l} \text{كرتين حمراوين} \\ \text{أو الأخرى} \\ \text{مخالفة للأحمر} \end{array} \text{ و كرة حمراء و } \begin{array}{l} \text{كرتان تخالفان} \\ \text{اللون الأحمر} \end{array} \right)$$

$$= p \left(\begin{array}{l} \text{كرتين حمراوين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{مخالفة للأحمر} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{l} \text{كرتان تخالفان} \\ \text{اللون الأحمر} \end{array} \right)$$

$$= \frac{C_5^1 \times C_7^2}{card(\Omega)} + \frac{C_5^2 \times C_7^1}{card(\Omega)} + \frac{C_5^3 \times C_7^0}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{5 \times 21}{220} + \frac{10 \times 7}{220} + \frac{10}{220} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$



2 ب

ليكن $n \in \mathbb{N}$. لدينا حسب السؤال أ) : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

إذن : $v_n(u_n + 1) = u_n - 1$

يعني : $v_n u_n + v_n = u_n - 1$

أي : $v_n u_n - u_n = -1 - v_n$

يعني : $u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$

أي : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$ أي $u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1}$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$

3 أ

لدينا حسب السؤال 2 أ) : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1}$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1} + 1}$

$$= 1 - \frac{2}{\left(\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} + 1\right)} = 1 - \frac{2}{\left(\frac{7u_n + 7}{3u_n + 4}\right)}$$

$$= 1 - \frac{2(3u_n + 4)}{7u_n + 7} = \frac{7u_n + 7 - 6u_n - 8}{7u_n + 7}$$

$$= \frac{(u_n - 1)}{7(u_n + 1)} = \frac{1}{7} v_n$$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{7} v_n$

يعني : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$.

إذن الحد العام v_n يكتب على الشكل التالي : $v_n = v_0 \left(\frac{1}{7}\right)^{n-0}$

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7}\right)^n$: إذن $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}$

3 ب

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد حقيقي موجب و أصغر من 1

إذن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ و منه : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني : $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 0$

و لدينا حسب السؤال 2 أ) : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + 1 = \frac{2}{1 - v_n}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{2}{1 - v_n} - 1$

و بالتالي : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1 - v_n} - 1\right) = \frac{2}{1 - 0} - 1 = 1$

يعني : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 1$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

من أجل $x = 0$ نحصل على :

$$f'(0) = 1 + \frac{2e^0}{(e^0 + 1)^2} = 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \quad \text{لدينا}$$

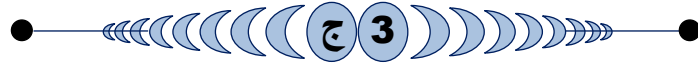
نعلم أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 2e^x > 0$ و $(e^2 + 1)^2 > 0$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0 \quad \text{يعني :}$$

إذن f دالة تزايدية قطعاً على \mathbb{R} .



نعلم أن معادلة المماس (T) للمنحنى (\mathcal{C}) في النقطة x_0 تُكتب على الشكل :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

إذن من أجل $x_0 = 0$ نجد : $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

يعني : $(T) : y = f'(0) \cdot x + f(0)$

$$f'(0) = \frac{3}{2} \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

إذن المعادلة الديكارتية للمماس (T) تُصبح : $(T) : y = \frac{3}{2}x$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} \right)$$

$$= \left(+\infty + 1 - \frac{2}{+\infty} \right) = (+\infty + 1 - 0) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{e^x + 1} \right) = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x + 1)} \right) \quad \text{و لدينا من جهة أخرى :}$$

$$= 1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty} = 1 + 0 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{إذن :}$$



الطريقة الثانية : استعمال تقنية الحدث المضاد .

إذا كان \bar{A} هو الحدث المضاد للحدث A فإن : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

نضع : $A = \{ \text{الحصول على كرة واحدة على الأقل} \}$

إذن : $\bar{A} = \{ \text{الحصول على ثلاث كرات من ألوان تخالف الأحمر} \}$

$$p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث كرات} \\ \text{تخالف اللون} \\ \text{الأحمر} \end{array} \right) = p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{بيضاويتين} \\ \text{أو الأخرى} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{خضراويتين} \\ \text{أو الأخرى} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right)$$

$$= p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{بيضاويتين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{خضراويتين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right)$$

$$= \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} + \frac{C_4^2 \times C_3^1}{220} + \frac{C_3^2 \times C_4^1}{220}$$

$$= \frac{4}{220} + \frac{1}{220} + \frac{18}{220} + \frac{12}{220} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

إذن : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

$$p(A) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{44 - 7}{44} = \frac{37}{44}$$

و بالتالي : احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو : $\frac{37}{44}$

التمرين الخامس



ليكن x عنصراً من \mathbb{R} . لدينا : $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

$$f(-x) = -x + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -x + \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)}$$

$$= -x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = - \left(x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) = -f(x)$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = -f(x)$

و هذا يعني أن الدالة f دالة فردية وتمثيلها المبياني متماثل بالنسبة للنقطة O أصل المعلم .



لدينا : $x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} = x + \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1}$

$$= x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$



لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 - \left(\frac{2}{e^x + 1} \right)$

$$= 1 - \left(\frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2} \right) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

• **6 أ**

$$H'(x) = (x - \ln(e^x + 1))' \quad \text{ليكن } x \text{ عددا حقيقيا . لدينا :}$$

$$= 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} = h(x)$$

إذن H دالة أصلية للدالة h على \mathbb{R} .

• **6 ب**

$$\int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) dx = \int_0^{\ln 2} h(x) dx = [H(x)]_0^{\ln 2}$$

$$= [x - \ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} = (\ln 2 - \ln 3) - (0 - \ln 2)$$

$$= 2 \ln 2 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \left(\frac{4}{3} \right)$$

• **6 ج**

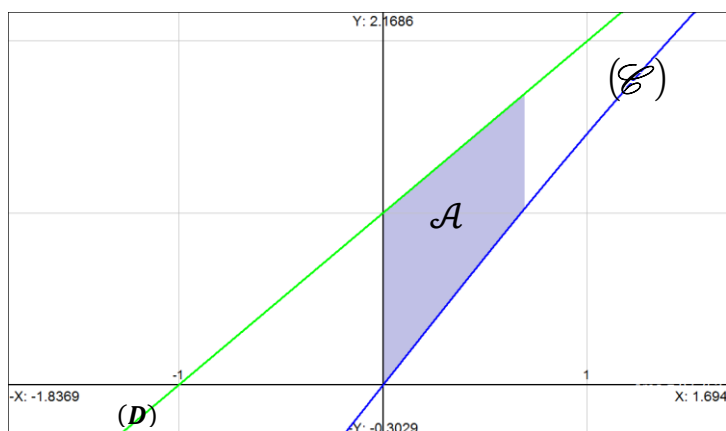
لتكن \mathcal{A} مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (\mathcal{E}) و المستقيم (D) والمستقيمين $x = \ln 2$ و $x = 0$. لدينا :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x + 1)| dx = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{-2}{e^x + 1} \right| dx$$

$$= 2 \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) dx = 2 \left(\ln \left(\frac{4}{3} \right) \right) \approx 0,57 \text{ unité}^2$$



صورة أخرى للمساحة \mathcal{A}



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = 1 \end{cases}$$

لقد حصلنا لحد الآن على النهايات التالية :

إذن من هذه النهايات الثلاث نستنتج أن المستقيم $(D) : y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{E}) بجوار $+\infty$.

• **4 ج**

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (\mathcal{E}) و المستقيم (D) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x + 1)$.

لدينا :

$$f(x) - (x + 1) = (x + 1) - \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1)$$

$$= \frac{-2}{e^x + 1}$$

و نعلم أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x + 1 > 0$

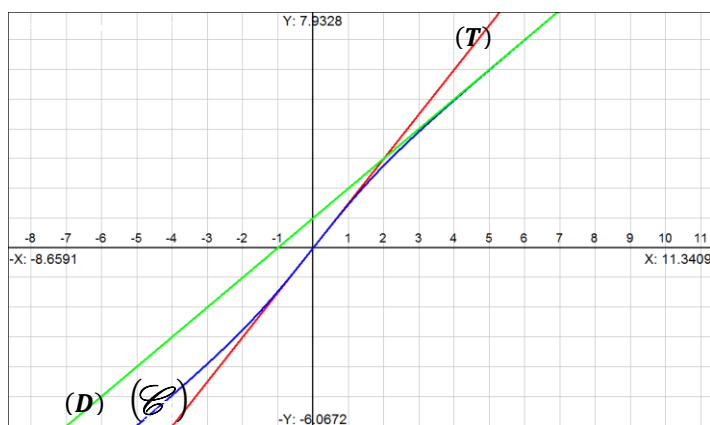
يعني : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{-2}{e^x + 1} < 0$

يعني : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) - (x + 1) < 0$

يعني : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) < (x + 1)$

و بالتالي : المستقيم (D) يوجد فوق المنحنى (\mathcal{E})

• **5**



المنحنى (\mathcal{E}) لوحده

