

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2014

الموضوع

NS 22

ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵔⵓⵏ
ⵜⴰⵎⴰⵔⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵔⵓⵏ
ⵏ ⵍⵎⴰⵔⵓⵏالمملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	الشعبة أو المسلك

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من أربعة تمارين و مسألة مستقلة فيما بينها و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	المتتاليات العددية	3 نقط
التمرين الرابع	حساب الاحتمالات	3 نقط
المسألة	دراسة دالة وحساب التكامل	8 نقط

- بالنسبة للمسألة ، \ln يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

الموضوعالتمرين الأول : (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $A(0, 3, 1)$ و $B(-1, 3, 0)$

و $C(0, 5, 0)$ و الفلكة (S) التي معادلتها : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0$

(1) أ- بين أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ واستنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية 0.75

ب- بين أن $2x - y - 2z + 5 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) 0.5

(2) أ- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2, 0, 0)$ و أن شعاعها هو 3 0.5

ب- بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) 0.75

ج- حدد مثلث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S) 0.5

التمرين الثاني : (3 ن)

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة : $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$ 0.75

(2) نعتبر العدد العقدي $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$

أ- بين أن معيار العدد u هو $\sqrt{2}$ و أن $\arg u \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ 0.5

ب- باستعمال كتابة العدد u على الشكل المثلثي، بين أن u^6 عدد حقيقي 0.75

(3) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقطتين A و B اللتين

لحاقهما على التوالي هما a و b بحيث $a = 4 - 4i\sqrt{3}$ و $b = 8$

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

أ- عبر عن z' بدلالة z 0.5

ب - تحقق من أن B هي صورة A بالدوران R و استنتج أن المثلث OAB متساوي الأضلاع 0.5

التمرين الثالث : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 13$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7$ لكل n من IN

(1) بين بالترجع أن $u_n < 14$ لكل n من IN 0.75

(2) لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث : $v_n = 14 - u_n$ لكل n من IN

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم اكتب v_n بدلالة n 1

ب- استنتج أن $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من IN ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) 0.75

ج- حدد أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n > 13,99$ 0.5

التمرين الرابع : (3 ن)

يحتوي كيس على تسع بيدات لا يمكن التمييز بينها باللمس وتحمل الأعداد : 0 و 0 و 0 و 0 و 1 و 1 و 1 و 1 و 1 (1) نسحب عشوائيا و في آن واحد بيداتين من الكيس
ليكن A الحدث : " مجموع العددين اللذين تحملهما البيداتين المسحوبتين يساوي 1 "

$$p(A) = \frac{5}{9} \text{ بين أن}$$

(2) نعتبر اللعبة التالية : يسحب سعيد عشوائيا و في آن واحد بيداتين من الكيس و يعتبر فائزا إذا سحب بيداتين تحمل كل واحدة منهما العدد 1

$$\text{أ- بين أن احتمال فوز سعيد هو } \frac{1}{6}$$

ب- لعب سعيد اللعبة السابقة ثلاث مرات (يعيد سعيد البيداتين المسحوبتين إلى الكيس في كل مرة)
ما هو الاحتمال لكي يفوز سعيد مرتين بالضبط ؟

المسألة : (8 ن)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$

(1) بين أن $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ لكل x من $]0, +\infty[$ و استنتج أن الدالة g تزايدية على $]0, +\infty[$

(2) تحقق من أن $g(1) = 0$ ثم استنتج أن $g(x) \leq 0$ لكل x من $]0, 1[$ و $g(x) \geq 0$ لكل x من $]1, +\infty[$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة : 1 cm)

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة

(2) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0$ (يمكنك وضع $t = \sqrt{x}$) ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

ج- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

(3) أ- بين أن $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0, +\infty[$ ثم استنتج أن الدالة f تناقصية على $]0, 1[$

و تزايدية على $]1, +\infty[$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0, +\infty[$ ثم استنتج أن $f(x) \geq 2$ لكل x من $]0, +\infty[$

(4) أنشئ (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة تحديدها غير مطلوب)

(5) نعتبر التكاملين I و J التاليين : $I = \int_1^e (1 + \ln x) dx$ و $J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$

أ- بين أن $H : x \mapsto x \ln x$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto 1 + \ln x$ على $]0, +\infty[$ ثم استنتج أن $I = e$

ب- باستعمال كاملة بالأجزاء ، بين أن $J = 2e - 1$

ج- احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصل و المستقيمين

اللذين معادلتاهما $x = e$ و $x = 1$

تصحيح الإمتحان الوطني 2014

الرياضيات

عناصر الإجابة :

تمرين 1 : (3 نقط)

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -1 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 2 \\ \vec{k} & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

إذن :

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \overline{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} : \text{لدينا } \textcircled{1}$$

بما أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \neq \vec{0}$ فإن A و B و C نقط غير مستقيمة

ب) لدينا (ABC) هو المستوى المار من A والتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ منتظمة له .

$$M(x; y; z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = 0 \text{ (إذن)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-3 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2x - y - 2z + 5 = 0$$

﴿ أو النقط A و B و C تحقق المعادلة $2x - y - 2z + 5 = 0$ (إذن هي معادلة المستوى (ABC)) ﴾

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 9 = 3^2 : \text{لدينا } \textcircled{2}$$

إذن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(2; 0; 0)$ وشعاعها $R = 3$

$$c) \text{ لدينا : } d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 2 - 0 - 0 + 5|}{\sqrt{4+1+4}} = 3 \text{ (إذن : مساس الفلكة (S))}$$

ج) لدينا $H(c, b, a)$ السقط العمودي لـ Ω على (ABC) (إذن H هي تقاطع (ABC) والمستقيم المار من Ω و العمودي على (ABC))

$$\exists t \in \mathbb{R} / a = 2 + 2t ; b = -t ; c = -2t \text{ و } 2a - b - 2c + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ (إذن)}$$

إذن $H(0; 1; 2)$.

تمرين 2 : (3 نقطة)

1) لدينا : $\left\langle z^2 - \sqrt{2}z = (z - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{1}{2} \right\rangle$ لأن : $z^2 - \sqrt{2}z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{3}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i \text{ أو } z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

وبالتالي $S = \{ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i , \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \}$

2) لدينا : $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

ومنه $|u| = \sqrt{2} ; \arg u = \frac{\pi}{3} [2\pi]$

ب) لدينا : $u^6 = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{3} \right]^6 \Rightarrow u^6 = \left[(\sqrt{2})^6; \frac{6\pi}{3} \right] \Rightarrow u^6 = [16; 2\pi] \Rightarrow u^6 = 16$

ومنه $u^6 \in \mathbb{R}$

3) لدينا : $R(O, \frac{\pi}{3})[z]M = [(z)M'] \Leftrightarrow z - z_0 = (z - z_0) \times e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow z = z' \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

ب) لدينا : $z_A \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = (4 - 4\sqrt{3}i) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

$$= \left(4 \times \frac{1}{2} + 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + i \left(4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \right)$$

$$= 8 = z_B$$

ومنه $R(O, \frac{\pi}{3})[B] = [A]$

لدينا : $R(O, \frac{\pi}{3})[B] = [A] \Rightarrow \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \left[1; \frac{\pi}{3} \right]$

إذن OAB مثلث متساوي الأضلاع .

تمرين 3 : (3 نقطة)

1) من أجل $n=0$ لدينا : $U_0 = 13$ و $13 < 14$ إذن الخاصية تتحقق

ليكن n من \mathbb{N} نفترض أن $U_n < 14$ لنبين أن $U_{n+1} < 14$

$$U_n < 14 \Rightarrow \frac{1}{2}U_n + 7 < \frac{14}{2} + 7 \quad \text{لدينا}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} < 14$$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n < 14$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}: V_{n+1} &= 14 - U_{n+1} \\ &= 14 - \frac{1}{2}U_n - 7 \\ &= 7 - \frac{1}{2}U_n \\ &= \frac{1}{2}(14 - U_n) = \frac{1}{2}V_n \end{aligned} \quad \text{2 أ لدينا:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ و } V_0 = 1 \text{ وعرها الأول ومنه}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: V_n = 14 - U_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: U_n = 14 - V_n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{ب لدينا:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 14 \text{ وبالتالي: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ فإن: } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ وبعال:}$$

$$U_n > 13.99 \Leftrightarrow 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 13.99 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 14 - 13.99$$

ج لدينا:

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n < \ln(0.01) \Leftrightarrow -n \ln 2 < -2 \ln 10 \Leftrightarrow n > \frac{2 \ln 10}{\ln 2}$$

$$\text{ولدينا: } \frac{2 \ln 10}{\ln 2} \approx 6.67 \text{ فإن } n = 7.$$

تمرين 4: (3 نقطة)

1 كل إمكانية عبارة عن تاليفة لعنصرين من بين تسع عناصر وعرها هو $C_9^2 = 36$

$$p(A) = \frac{C_4^1 \times C_5^1}{C_9^2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \quad \text{لدينا " 10 " A فإن}$$

$$p(G) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{لدينا " 11 " G ومنه}$$

ب نعتبر الحدث " يفوز سعيير مرتين بالضبط " B فإن " 3 حالات ← G/\bar{G} " B

$$p(B) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{72} \text{ ومنه:}$$

مسألة (8 نقطة)

الجزء الأول:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : g'(x) = \frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} \quad \text{1} \text{ لدينا :}$$

وبما أن $x > 0$ فإن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : g'(x) > 0$ ومنه g تزايدية قطعاً على \mathbb{R}_+^*

$$\text{2} \text{ لدينا } g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0 \text{ وحيث أن } g \text{ تزايدية على } \mathbb{R}_+^* \text{ فإن :}$$

$$x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1) \Rightarrow g(x) \geq 0 \quad \text{و} \quad 0 < x \leq 1 \Rightarrow g(x) \leq g(1) \Rightarrow g(x) \leq 0$$

إذن :

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g(x)$	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{1} \text{ لدينا :}$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ومنه (ζ_f) يقبل مقارياً عمودياً معاويلته $x = 0$

$$\text{2} \text{ لدينا :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{إذن :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب. لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(t^2))^2}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2\ln(t^2) + (\ln(t^2))^2}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 4\ln(t) + 4(\ln(t))^2}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} + 4\frac{\ln(t)}{t^2} + 4\frac{(\ln(t))^2}{t^2} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0 \quad \text{إذن} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(t))^2}{t^2} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(1+\ln x)^2}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = 0 \quad \text{إذن :}$$

بـ لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (فون (ζ_f) يقبل فرعاً شلجيميا في اتجاه محور الأفاصيل بحدود +∞)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = \frac{2(1+\ln x)}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x} \left(1 + \ln x - \frac{2}{x^2} \right)$$

$$= \frac{2g(x)}{x} \quad \text{3} \quad \text{دـ لدينا :}$$

ومنه إشارة f'(x) هي إشارة g(x) على \mathbb{R}_+^*

ولدينا :

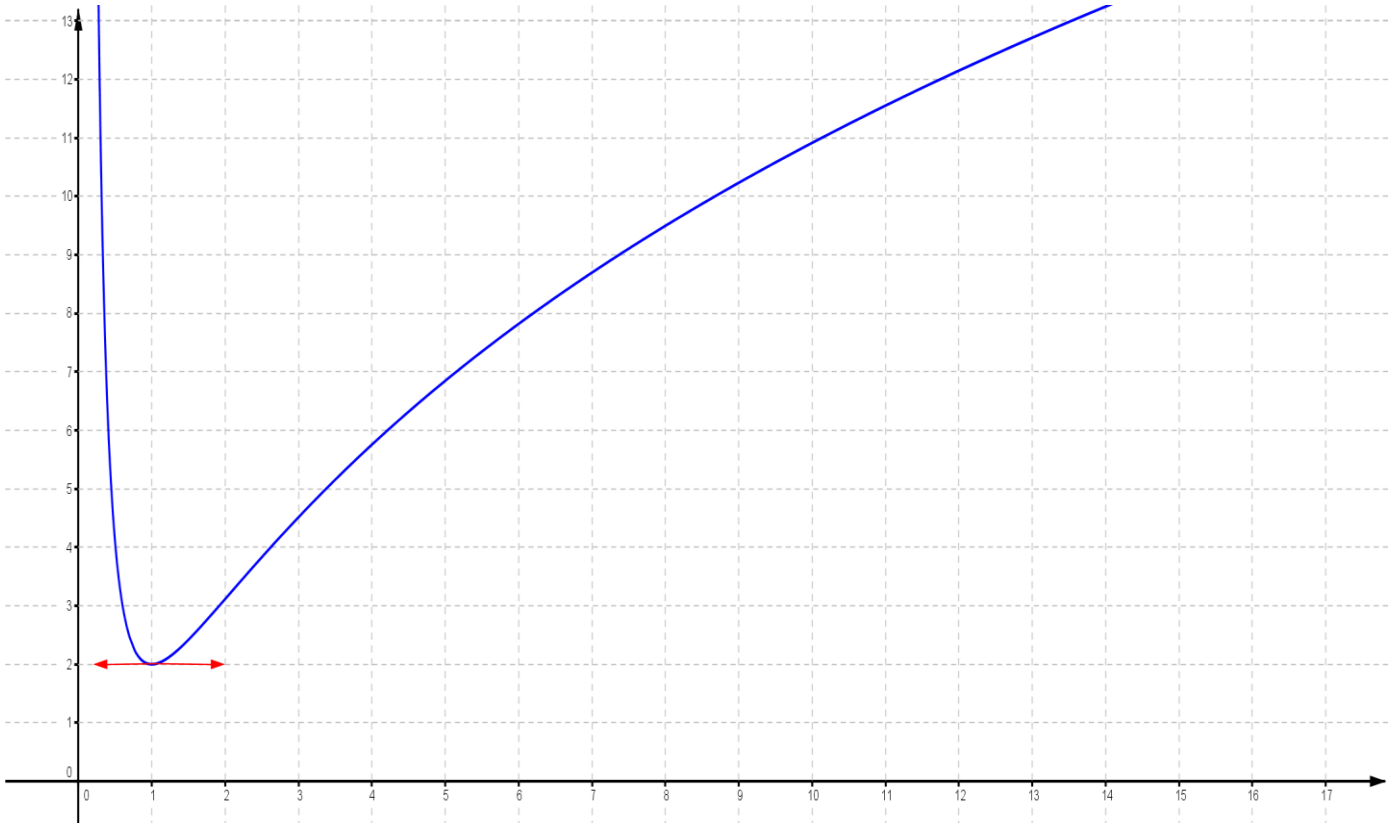
x	0	1	+∞
إشارة g(x)	-	0	+

بـ لدينا :

x	0	1	+∞
f'(x)	-	0	+
f	-∞	2	+∞

لدينا 2 قيمة ونيا مطلقة للدالة f (فون $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f(x) \geq 2$)

4 (إنشاء (ζ_f) :



5 أ لدرينا : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : H'(x) = \ln x + 1$

$$I = \int_1^e (1 + \ln x) dx = H(e) - H(1) = e \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{cases} u(x) = (1 + \ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{2(1 + \ln x)}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \quad \text{ب نضع :}$$

$$J = \left[x(1 + \ln x)^2 \right]_{-1}^e - 2 \int_1^e (1 + \ln x) dx \quad \text{إذن :}$$
$$= 4e - 1 - 2e = 2e - 1$$

$$A(f) = \int_1^e |f(x)| dx \times 1 \text{ cm}^2 = \left(J - \left[\frac{1}{x} \right]_1^e \right) \text{ cm}^2 = \frac{2e^2 - 1}{e} \text{ cm}^2 \quad \text{ج لدرينا :}$$