

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2014
الموضوع

RS 22

ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵏⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵔⵓⵏⵉ
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵏⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵔⵓⵏⵉ
ⵏ ⵍⵎⴰⵔⵓⵏⵉ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها	الشعبة أو المسلك

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات و مكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان)؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

مكونات الموضوع

يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

3 نقط	الهندسة الفضائية	التمرين الأول
3 نقط	المتاليات العددية	التمرين الثاني
3 نقط	حساب الاحتمالات	التمرين الثالث
3 نقط	الأعداد العقدية	التمرين الرابع
8 نقط	دراسة دالة وحساب التكامل	التمرين الخامس

الموضوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطة $A(0,0,1)$ والمستوى (P) الذي معادلته $2x + y - 2z - 7 = 0$ والكرة (S) التي مركزها $\Omega(0,3,-2)$ و شعاعها هو 3

$$(1) \text{ أ- بين أن : } (t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \text{ تمثيل بارامتري للمستقيم } (\Delta) \text{ المار من النقطة } A \text{ والعمودي على } (P) \quad 0.5$$

ب- تحقق من أن $H(2,1,-1)$ هي نقطة تقاطع المستوى (P) والمستقيم (Δ) 0.5

$$(2) \text{ أ- بين أن } \overline{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) \text{ حيث } \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \quad 0.75$$

ب- بين أن مسافة النقطة Ω عن المستقيم (Δ) تساوي 3 0.5

ج- استنتج أن المستقيم (Δ) مماس للكرة (S) و تحقق من أن H هي نقطة تماس المستقيم (Δ) والكرة (S) 0.75

التمرين الثاني (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $u_1 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n}$ لكل n من \mathbb{N}^*

(1) بين بالترجع أن $u_n > 2$ لكل n من \mathbb{N}^* 0.75

(2) نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$ لكل n من \mathbb{N}^*

أ- بين أن $v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$ لكل n من \mathbb{N}^* ثم بين أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ حسابية أساسها 1 1

ب- اكتب v_n بدلالة n و استنتج أن $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ لكل n من \mathbb{N}^* 0.75

ج- حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0.5

التمرين الثالث (3 ن)

لتحديد سؤالي اختبار شفوي خاص بمباراة توظيف، يسحب مترشح، عشوائيا ، بالنتابع و بدون إحلال بطاقتين من صندوق يحتوي على 10 بطاقات : ثمان بطاقات تتعلق بمادة الرياضيات و بطاقتان تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية (نعتبر أنه لا يمكن التمييز بين البطاقات باللمس).

(1) نعتبر الحدث A : " سحب بطاقتين تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية " 1.5
و الحدث B : " سحب بطاقتين تتعلقان بمادتين مختلفتين "

$$\text{بين أن } p(A) = \frac{1}{45} \text{ و } p(B) = \frac{16}{45}$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد البطاقات المسحوبة المتعلقة بمادة اللغة الفرنسية

أ- تحقق من أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 0.25

ب- بين أن $p(X = 0) = \frac{28}{45}$ ثم أعط قانون احتمال X 1.25

التمرين الرابع (3 ن)

- 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$ 0.75
- 2) نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقط A و B و C و D و Ω التي أحاقها على التوالي هي : $a = 2 + i$ و $b = 2 - i$ و $c = i$ و $d = -i$ و $\omega = 1$
- أ- بين أن $\frac{a - \omega}{b - \omega} = i$ 0.25
- ب- استنتج أن المثلث ΩAB قائم الزاوية و متساوي الساقين في Ω 0.5
- 3) ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$
- أ- بين أن : $z' = iz + 1 - i$ 0.5
- ب- تحقق من أن $R(A) = C$ و $R(D) = B$ 0.5
- ج- بين أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة محددًا مركزها 0.5

التمرين الخامس (8 ن)

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = (xe^x - 1)e^x$
- و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة : 2 cm)
- 1) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و أول النتيجة هندسيا 0.75
- 2) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ 0.75
- ب- استنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه 0.5
- 3) أ- بين أن $f'(x) = e^x(e^x - 1 + 2xe^x)$ لكل x من IR ثم تحقق من أن $f'(0) = 0$ 1
- ب- بين أن $e^x - 1 \geq 0$ لكل x من $[0, +\infty[$ و أن $e^x - 1 \leq 0$ لكل x من $]-\infty, 0]$ 0.5
- ج- بين أن الدالة f تزايدية على $[0, +\infty[$ و تناقصية على $]-\infty, 0]$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على IR 1.25
- 4) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0, +\infty[$ و أن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (نقبل أن $\frac{1}{2} < e^{\frac{1}{2}} < 1$) 0.75
- ب- أنشئ (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها) 0.75
- 5) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx = \frac{1}{4}$ 0.75
- 6) احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ 1

حل التمرين 1

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

لدينا: $A(0; 0; 1)$ و $P: 2x + y - 2z - 7 = 0$

و $S: S(\Omega; 3)$ حيث $\Omega(0; 3; -2)$

$$(1) \text{ أ- أبن أن: } \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ تمثيل بارامتري}$$

للمستقيم (Δ) المار من A والعمودي على (P) .

لدينا: $2x + y - 2z - 7 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) ،

إذن فالمتجه التي مثلثت إحداثياتها $(2; 1; -2)$ هي متجهة

منظمة على (P) وبالتالي فهي متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

العمودي على (P) والمار من النقطة $A(0; 0; 1)$.

ومنه فالتمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) هو:

$$(\Delta): \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ يعني أن:}$$

ب- أتتحقق من أن $H(2; 1; -1)$ هي نقطة تقاطع المستوى (P)

والمستقيم (Δ) .

بما أن (Δ) عمودي على (P) فإن (Δ) يخترق المستوى (P) في

نقطة H أتأكد أن مثلثت إحداثياتها هو $(2; 1; -1)$:

$$\text{ولدينا: } 2 \times (2) + (1) - 2 \times (-1) - 7 = 7 - 7 = 0$$

إذن $H \in (P)$

ومن أجل $t = 1$ في التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) أجد:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \text{ وهي إحداثيات النقطة } H.$$

إذن $H(2; 1; -1)$ هي نقطة تقاطع المستوى (P) والمستقيم (Δ) .

$$(2) \text{ أ- أبن أن: } \overline{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$\text{حيث } \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

لدينا: $A(0; 0; 1)$ و $\Omega(0; 3; -2)$ إذن: $\overline{\Omega A}(0; -3; 3)$

وبما أن: $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ فإن:

$$\overline{\Omega A} \wedge \vec{u} = (0\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}) \wedge (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$$

$$= (-3\vec{j} + 3\vec{k}) \wedge (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$$

$$= 3(-\vec{j} + \vec{k}) \wedge (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$$

$$= 3[-2\vec{j} \wedge \vec{i} - \vec{j} \wedge \vec{j} + 2\vec{j} \wedge \vec{k} + 2\vec{k} \wedge \vec{i} + \vec{k} \wedge \vec{j} - 2\vec{k} \wedge \vec{k}]$$

$$= 3[2\vec{k} - \vec{0} + 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{i} - \vec{0}]$$

$$\text{إذن: } \overline{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

ب- أبن أن مسافة النقطة Ω عن (Δ) تساوي 3.

لدينا: $\Omega(0; 3; -2)$ و $A(0; 0; 1)$ تنتمي إلى (Δ)

و $\vec{u}(2; 1; -2)$ متجهة موجهة لـ (Δ)

$$\text{إذن: } d(\Omega; (\Delta)) = \frac{|\overline{\Omega A} \wedge \vec{u}|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})|}{\|2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\|}$$

$$= \frac{3\|\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\|}{\|2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\|} = 3 \frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}}$$

$$= 3$$

ج- أستنتج أن المستقيم (Δ) مماس للفلكرة (S) وأتتحقق أن H

هي نقطة تماس المستقيم (Δ) والفلكرة (S) .

• لدينا حسب نتيجة السؤال السابق: مسافة Ω مركز الفلكرة

(S) عن المستقيم (Δ) تساوي 3 الذي هو شعاع الفلكرة، إذن

المستقيم (Δ) مماس للفلكرة (S) .

• نعلم أن النقطة $H(2; 1; -1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

$$\text{ولدينا: } \overline{\Omega H}(2; -2; 1) \text{ و } \overline{\Omega H} = \|\overline{\Omega H}\|$$

$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

بما أن H تبعد عن Ω مركز الفلكة بالمسافة 3 التي تساوي شعاع الفلكة فإن $H \in (S)$ وبالتالي فالنقطة H هي نقطة تماس الفلكة (S) والمستقيم (Δ) .

حل التمرين 2

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ هي المتتالية بحيث:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} \text{ و } u_1 = 5$$

(1) أبين بالترجع أن: $u_n > 2$ لكل n من \mathbb{N}^*

• من أجل $n = 1$ لدينا: $u_1 = 5 > 2$ إذن الخاصية صحيحة من أجل الحد الأول.

• نفترض أن: $u_n > 2$ من أجل $n \geq 1$ ولنبين أنها صحيحة من أجل $n + 1$:

لدينا:

$$u_{n+1} - 2 = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2 = \frac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1 + u_n} = \frac{3u_n - 6}{1 + u_n} = \frac{3(u_n - 2)}{1 + u_n}$$

وبما أن $u_n > 2$ حسب افتراض التراجع فإن $u_n > 0$ و $u_n - 2 > 0$

$$u_{n+1} - 2 = \frac{3(u_n - 2)}{1 + u_n} > 0 \text{ و } 1 + u_n > 0 \text{ و } u_{n+1} > 2$$

يعني أن: $u_{n+1} > 2$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

وبالتالي: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n > 2$

(2) لدينا $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة كما يلي: $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$

أبين أن $v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$ لكل n من \mathbb{N}^* ثم أبين أن المتتالية

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ حسابية أساسها 1.

• لكل n من \mathbb{N}^* لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{3}{u_{n+1} - 2} = \frac{3}{\frac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2} = \frac{3}{\frac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1 + u_n}} = \frac{3}{\frac{3u_n - 6}{1 + u_n}} = \frac{3(1 + u_n)}{3u_n - 6} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$$

إذن لكل n من \mathbb{N}^* لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{3}{\frac{3u_n - 6}{1 + u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{3(1 + u_n)}{3(u_n - 2)} \text{ يعني أن:}$$

$$\text{يعني أن: } v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

• لدينا لكل n من \mathbb{N}^* :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1 + u_n}{u_n - 2} - \frac{3}{u_n - 2} = \frac{1 + u_n - 3}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2}{u_n - 2} = 1 \quad (u_n \neq 2)$$

إذن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية حسابية أساسها 1.

ب- أكتب v_n بدلالة n وأستنتج أن: $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ لكل

n من \mathbb{N}^*

• لدينا: $v_1 = \frac{3}{u_1 - 2} = \frac{3}{5 - 2} = 1$ إذن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية

حسابية حدها الأول $v_1 = 1$ وأساسها $r = 1$ إذن حسب

صيغة الحد العام لمتتالية حسابية: لدينا

$$v_n = v_1 + (n - 1)r : \mathbb{N}^* \text{ لكل } n$$

$$v_n = 1 + (n - 1) \times 1 \text{ يعني}$$

$$v_n = n : \mathbb{N}^* \text{ لكل } n$$

• نعلم أن لكل n من \mathbb{N}^* : $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$ يعني $u_n - 2 = \frac{3}{v_n}$

$$\text{إذن: } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \frac{3}{v_n} + 2$$

$$\text{يعني أن: } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \frac{3}{n} + 2$$

ج- أحدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$ وبما أن $u_n = \frac{3}{n} + 2$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

ب- أبن أن: $p(X=0) = \frac{28}{45}$ ثم أعطي قانون احتمال X .
 الحدث $(X=0)$ يعني أن البطاقتين المسحوبتين هي لمادة الرياضيات،

إذن: $\text{card}(X=0) = A_8^2 = 56$ وبالتالي:

$$p(X=0) = \frac{\text{card}(X=0)}{\text{card } \Omega} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$$

• قانون احتمال X :

لدينا: $(X=1)$ هو الحدث B (سحب بطاقتين مختلفتي المادة)

و $(X=2)$ هو الحدث A (سحب بطاقتين للغة الفرنسية)

وبالتالي فقانون احتمال X هو:

$X(\Omega)$	0	1	2
$p(X=x_i)$	$p(X=0) = \frac{28}{45}$	$p(X=1) = \frac{16}{45}$	$p(X=2) = \frac{1}{45}$

حل التمرين 4

(1) أحل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$

مميز هذه المعادلة هو: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 \times 1 = 16 - 20 = -4$

إذن: $\Delta = (2i)^2$

وحلي المعادلة هما: $z_1 = \frac{4-2i}{2}$ و $z_2 = \frac{4+2i}{2}$

أي: $z_1 = 2-i$ و $z_2 = 2+i$

إذن مجموعة الحلول هي: $S = \{2-i; 2+i\}$

(2) في المستوى العقدي النسب إلى المعلم المتعامد المنظم المباشر

$$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

لدينا: $A(a=2+i)$ و $B(b=2-i)$ و $C(c=i)$ و $D(d=-i)$

$$\Omega(\omega=1)$$

أ- أبن أن: $\frac{a-\omega}{b-\omega} = i$

لدينا: $\frac{a-\omega}{b-\omega} = \frac{2+i-1}{2-i-1} = \frac{1+i}{1-i}$

$$= \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i+1}{1+1} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

حل التمرين 3

التجربة العشوائية تقتضي السحب بالتتابع وبدون إحلال لبطاقتين من صندوق يحتوي على 10 بطاقات.

(1) A هو الحدث: «سحب بطاقتين تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية»

B هو الحدث: «سحب بطاقتين تتعلقان بمادتين مختلفتين»

حيث عدد بطاقات الرياضيات هو 8 وعدد بطاقات الفرنسية هو 2.

• أبن أن: $p(A) = \frac{1}{45}$ و $p(B) = \frac{16}{45}$

- بما أننا في حالة فرضية تساوي الاحتمالات فإن:

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

التجربة العشوائية و $\text{card } \Omega = A_{10}^2 = 90$

وبما أن A هو الحدث: سحب بطاقتين للغة الفرنسية من أصل

بطاقتين فإن: $\text{card } A = A_2^2 = 2$

وبالتالي لدينا: $p(A) = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$

كذلك لدينا: $p(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \frac{2 \times A_2^1 \times A_8^1}{90}$

$$= \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

(لأن عدد إمكانيات B هو $A_2^1 \times A_8^1$ مع أخذ بالاعتبار ترتيب

البطاقتين أي الضرب في الذي هو عدد المواقع في الترتيب).

(2) X هو المتغير العشوائي الذي يُعطي عدد بطاقات اللغة الفرنسية.

أ- أتتحقق أن القيم التي يأخذها X هي: 0 و 1 و 2.

بما أننا نسحب بطاقتين من الصندوق وعدد بطاقات الفرنسية بداخله هو 2 فإن إمكانيات سحب بطاقة للغة الفرنسية هي:

- البطاقتين المسحوبتين هما للرياضيات: في هذه الحالة X

يأخذ القيمة 0.

- البطاقتين مكونتين من واحدة مادة الرياضيات والأخرى

لمادة الفرنسية وفي هذه الحالة X يأخذ القيمة 1.

- البطاقتين المسحوبتين هما للغة الفرنسية وهنا X يأخذ

القيمة 2.

وبالتالي فالقيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي: 0 و 1 و 2

أي: $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

• ولدنا كذلك:

$$\begin{aligned} id + 1 - i &= i(-i) + 1 - i \\ &= 1 + 1 - i \\ &= 2 - i = b \end{aligned}$$

وهذا يعني أن: $R(D) = B$

ج- أبن أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة،
أحدد مركزها:

حسب النتيجة ب- لدينا: $R(A) = C$ إذن: $\Omega A = \Omega C$

و $R(D) = B$ إذن: $\Omega D = \Omega B$

وحسب النتيجة (2) ب- لدينا: $\Omega A = \Omega B$ ، نستنتج إذن أن:
 $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ وهذا يعني أن النقط A و C و D
و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها Ω .

حل التمرين 5

لدينا $f(x) = (xe^x - 1)e^x$ على \mathbb{R} كمايلي: $f(x) = (xe^x - 1)e^x$
(C) منحناها في معلم متعامد بمنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة 2cm)

(1) أبن أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ وأول النتيجة هندسياً.
• أعلم أن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\text{إذن:} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \times 0 = 0$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ يعني أن المنحنى (C) يقبل المستقيم ذي المعادلة:

$$y = 0 \quad \text{كمقارب أفقي بجوار} \quad -\infty.$$

(يعني أن محور الأفاصل هو مقارب أفقي للمنحنى (C)
بجوار $-\infty$)

$$(2) \quad \text{أبن أن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$\text{لدينا:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - 1)e^x = +\infty$$

$$\text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - 1) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{إذن:} \quad \frac{a - \omega}{b - \omega} = i$$

ب- أستنتج أن المثلث ΩAB قائم الزاوية ومتساوي الساقين
في Ω .

لدينا: $\Omega A: |a - \omega|$ و $\Omega B: |b - \omega|$

$$\frac{a - \omega}{b - \omega} = \frac{|a - \omega|}{|b - \omega|} = |i| = 1 \quad \text{فإن:} \quad \frac{a - \omega}{b - \omega} = i$$

إذن: $|a - \omega| = |b - \omega|$ أي أن: $\Omega A = \Omega B$ (1)

من جهة أخرى نعلم أن:

$$\begin{aligned} \overline{(\Omega B; \Omega A)} &= \arg\left(\frac{a - \omega}{b - \omega}\right) [2\pi] \\ &= \arg(i) [2\pi] \\ &= \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{aligned}$$

أي أن الزاوية $\widehat{A\Omega B}$ قائمة (2).

من النتيجة (1) و (2) نستنتج أن: ΩAB مثلث قائم الزاوية
ومتساوي الساقين في Ω .

(3) لدينا: $M(z)$ و $M'(z)$ حيث $M'(z) = M'$ و $R(M) = M'$ هو الدوران
الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{أ- أبن أن:} \quad z' = iz + 1 - i$$

أعلم أنه حسب الصيغة العقدية للدوران R لدينا:

$$z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$$

$$\text{وبما أن:} \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad \text{فإن:} \quad z' - 1 = iz - i$$

$$\text{وبالتالي:} \quad z' = iz + 1 - i$$

ب- أتحقق أن: $R(A) = C$ و $R(D) = B$

• حسب السؤال أ- لدينا: $z' = iz + 1 - i$

هي الصيغة العقدية للدوران R إذن:

$$ia + 1 - i = i(2 + i) + 1 - i$$

$$= 2i - \mathcal{X} + \mathcal{X} - i$$

$$= i = c$$

وهذا يعني أن: $R(A) = C$

ج- أبين أن الدالة f تزايدية على $[0; +\infty[$ وتناقصية على $]-\infty; 0]$. ثم أضع جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R} .

• لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = e^x (e^x - 1 + 2x e^x)$
 وحسب السؤال السابق لدينا: لكل x من $[0; +\infty[$:
 $f'(x) \geq 0$ و $e^x - 1 \geq 0$ و $e^x > 0$ و $2x e^x \geq 0$ إذن: $f'(x) \geq 0$
 وهذا يعني أن f تزايدية على $[0; +\infty[$.
 - ولكل x من $]-\infty; 0]$ لدينا: $e^x > 0$ و $x e^x \leq 0$
 و $e^x - 1 \leq 0$

إذن: $f'(x) \leq 0$ و $e^x > 0$ أي أن: $f'(x) \leq 0$
 وهذا يعني أن f تناقصية على المجال $]-\infty; 0]$.
 • جدول التغيرات على \mathbb{R} :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

4 أ- أبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $[0; +\infty[$
 وأن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

• أعلم أن الدالة: $x \mapsto e^x$ متصلة على $[0; +\infty[$ والدالة
 $x \mapsto x e^x$ متصلة على $[0; +\infty[$ إذن دالة الجداء: $x \mapsto x e^x$
 متصلة على $[0; +\infty[$ وبالتالي الدالة: $x \mapsto x e^x - 1$ متصلة
 على $[0; +\infty[$ إذن الدالة $f: x \mapsto (x e^x - 1) e^x$ متصلة على
 $[0; +\infty[$.

وحسب نتيجة السؤال السابق لدينا، f تزايدية قطعاً على
 $[0; +\infty[$ و $]-\infty; 0]$ (لأن $f' \geq 0$ و $f' \leq 0$).
 تنعدم في نقطة واحدة هي 0 على $[0; +\infty[$.
 وبما أن $0 \in]-\infty; 0]$ فإن 0 يقبل سابقاً وحيداً α بالدالة f
 في المجال $[0; +\infty[$ أي أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً
 وحيداً α في $[0; +\infty[$.

• أبين أن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$: لدينا: $f(1) = (e - 1) e > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(e^x - \frac{1}{x} \right) e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{x} \right) e^x$$

وبما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
 ب- أستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجماً بجوار $+\infty$ ،
 أحده.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ أ- لدينا حسب نتيجة (2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ و}$$

إذن المنحنى (C) يقبل محور الأرتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$.
 3 أ- أبين أن: $f'(x) = e^x (e^x - 1 + 2x e^x)$ لكل x من \mathbb{R}
 ثم أتحقق أن: $f'(0) = 0$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} (جاءت دالتين قابلتين
 للاشتقاق على \mathbb{R})
 ولدنا:

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) &= (x e^x - 1)' e^x + (x e^x - 1) (e^x)' \\ &= (x e^x)' e^x + (x e^x - 1) e^x \\ &= (e^x + x e^x) e^x + (x e^x - 1) e^x \\ &= e^x [e^x + x e^x + x e^x - 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) &= e^x (e^x - 1 + 2x e^x) \\ \text{لدينا: } f'(0) &= e^0 (e^0 - 1 + 2 \times 0 \times e^0) \\ &= 1 \times (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب- أبين أن: } e^x - 1 \geq 0 & \text{ ; } (\forall x \in [0; +\infty[) \\ \text{و } e^x - 1 \leq 0 & \text{ ; } (\forall x \in]-\infty; 0]) \end{aligned}$$

أعلم أن الدالة $x \mapsto e^x$ تزايدية على \mathbb{R} ، إذن:
 • لكل $x \geq 0$ لدينا: $e^x \geq e^0$ يعني $e^x \geq 1$ يعني $e^x - 1 \geq 0$
 وبالتالي: $e^x - 1 \geq 0$ لكل $x \in [0; +\infty[$.
 • لكل $x \leq 0$ لدينا: $e^x \leq e^0$ يعني $e^x \leq 1$ يعني $e^x - 1 \leq 0$
 وبالتالي: $e^x - 1 \leq 0$ لكل $x \in]-\infty; 0]$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} u'(x) v(x) dx \quad \text{ومنه:}$$

$$= [u(x) v(x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} u(x) v'(x) dx$$

$$= \left[x \times \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} e - \frac{1}{4} (e - 1) = \frac{1}{4} e - \frac{1}{4} e + \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx = \frac{1}{4} \quad \text{إذن:}$$

6) أحسب بمساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = \frac{1}{2}$ و $x = 0$

لتكن A مساحة الحيز المطلوب، لدينا:

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx \times (\text{الوحدة})$$

$$\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right] \right); f(x) \leq 0$$

$$\text{إذن: } |f(x)| = -f(x)$$

$$A = - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \times 4 \text{ cm}^2 \quad \text{وبالتالي:}$$

$$= - \int_0^{\frac{1}{2}} (x e^{2x} - 1) e^x dx \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \left(- \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \left(- \frac{1}{4} + \left[e^x \right]_0^{\frac{1}{2}} \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \left(- \frac{1}{4} + \sqrt{e} - 1 \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= (4 \sqrt{e} - 5) \text{ cm}^2$$

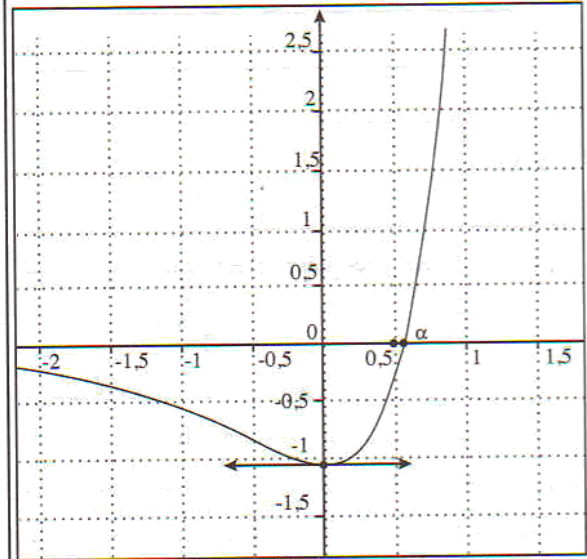
$$A = (4 \sqrt{e} - 5) \text{ cm}^2 \quad \text{إذن:}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} - 1\right) e^{\frac{1}{2}} \quad \text{و بما أن: } \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} < 1 \quad \text{فإن } f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

بما أن f متصلة وتزايدية قطعاً على $[0; +\infty[$ فإنها كذلك على $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

ولدينا $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن: $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

ب- إنشاء (C) في المعلم (O, \bar{i}, \bar{j}) (تقبل وجود نقطة انعطاف وحيدة)



لدينا: $f'(0) = 0$ يعني وجود تماس موازي لمحور الأفاصل في النقطة ذات الأفضول 0.

5) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أبين أن: $\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx = \frac{1}{4}$

أضع: $(v(x) = x \text{ و } u'(x) = e^{2x})$

إذن: $(v'(x) = 1 \text{ و } u(x) = \frac{1}{2} e^{2x})$