



3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها	الشعبة أو المسلك

تعليمات عامة

- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من أربعة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

2.5 نقط	المتتاليات العددية	التمرين الأول
3 نقط	الهندسة الفضائية	التمرين الثاني
3 نقط	الأعداد العقدية	التمرين الثالث
3 نقط	حساب الاحتمالات	التمرين الرابع
8.5 نقط	دراسة دالة عددية و حساب التكامل	مسألة

- بالنسبة للمسألة ، In يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري.

التمرين الأول: (2.5 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n}$ لكل n من IN

1) تحقق من أن $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$ لكل n من IN ثم بين بالترجع أن $u_n < 3$ لكل n من IN 0.75

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ لكل n من IN

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم استنتج أن $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من IN 0.75

ب- بين أن $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ لكل n من IN ثم اكتب u_n بدلالة n 0.5

ج- حدد نهاية المتتالية (u_n) 0.5

التمرين الثاني: (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $A(2, 1, 3)$ و $B(3, 1, 1)$

و $C(2, 2, 1)$ و الفلكة (S) التي معادلتها $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$

1) أ- بين أن $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ 0.5

ب- استنتج أن $2x + 2y + z - 9 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوى (ABC) 0.5

2) أ- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1, -1, 0)$ و أن شعاعها هو 6 0.5

ب- بين أن $d(\Omega, (ABC)) = 3$ و استنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) 0.5

3) أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (ABC) 0.5

ب- بين أن مركز الدائرة (Γ) هو النقطة B 0.5

التمرين الثالث: (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة : $z^2 - 4z + 29 = 0$ 0.75

2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقط Ω و A و B التي

أحاطها على التوالي هي ω و a و b بحيث $\omega = 2 + 5i$ و $a = 5 + 2i$ و $b = 5 + 8i$

أ- ليكن u العدد العقدي بحيث $u = b - \omega$ 0.75

تحقق من أن $u = 3 + 3i$ ثم بين أن $\arg u \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

ب- حدد عمدة للعدد العقدي \bar{u} (\bar{u} يرمز لمرافق العدد العقدي u) 0.25

ج- تحقق من أن $a - \omega = \bar{u}$ ثم استنتج أن $\Omega A = \Omega B$ و أن $\arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ 0.75

د- نعتبر الدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$ 0.5

حدد صورة النقطة A بالدوران R

التمرين الرابع: (3 ن)

يحتوي صندوق على 10 كرات : أربع كرات حمراء وست كرات خضراء .
(لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق .

1) ليكن A الحدث : " الكرتان المسحوبتان حمراوان " .

$$p(A) = \frac{2}{15} \text{ بين أن}$$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين.
أ- بين أن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $\{2, 3, 4\}$

ب- بين أن $p(X=3) = \frac{8}{15}$ ثم حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X

مسألة: (8.5 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة : 1 cm)

1-I) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x - 2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

2) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة .

3) أ- بين أن $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$ لكل x من \mathbb{R}

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R} (لاحظ أن $f'(0) = 0$)

ج- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]\ln 4, 1[$ بحيث $f(\alpha) = 0$

4) أ- بين أن المنحنى (C_f) يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]\ln 4, +\infty[$ وتحت المستقيم (D) على المجال $]-\infty, \ln 4[$

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثياتها هو $(0, -5)$

ج- أنشئ المستقيم (D) والمنحنى (C_f) في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) (نأخذ $\ln 4 \approx 1,4$ و $\alpha \approx 1,3$)

$$5) \text{ أ- بين أن } \int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$$

ب- احسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيم (D) ومحور

الأرتاب و المستقيم الذي معادلته $x = \ln 4$

1-II) أ- حل المعادلة التفاضلية $y'' - 3y' + 2y = 0$: (E)

ب- حدد الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين $g(0) = -3$ و $g'(0) = -2$

2) لتكن h الدالة العددية المعرفة على المجال $]\ln 4, +\infty[$ بما يلي : $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$

أ- بين أن الدالة h تقبل دالة عكسية h^{-1} و أن h^{-1} معرفة على \mathbb{R}

ب- تحقق من أن $h(\ln 5) = \ln 5$ ثم حدد $(h^{-1})'$ ($\ln 5$)

التصحيح :**تصحيح التمرين الأول :**

(1)

▪ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - 3 &= \frac{3 + u_n}{5 - u_n} - 3 \\
 &= \frac{3 + u_n - 15 + 3u_n}{5 - u_n} \\
 &= \frac{4u_n - 12}{5 - u_n} \\
 &= \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}
 \end{aligned}$$

إذن : $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$ لكل n من \mathbb{N}

✓ من أجل $n = 0$: لدينا $u_0 = 2$ إذن $u_0 < 3$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

• نفترض أن : $u_n < 3$

• و نبين أن : $u_{n+1} < 3$

لدينا $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$

و حسب الافتراض لدينا : $u_n < 3$

إذن $u_n - 3 < 0$ و $3 - u_n > 0$

إذن : $\frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)} < 0$

و منه $u_{n+1} - 3 < 0$

و بالتالي $u_{n+1} < 3$

✓ نستنتج أن $u_n < 3$ لكل n من \mathbb{N}

(2) أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{3 - u_{n+1}} \\ &= \frac{3 + u_n - 1}{5 - u_n} \\ &= \frac{5 - u_n}{4(3 - u_n)} \\ &= \frac{3 + u_n - 5 + u_n}{5 - u_n} \\ &= \frac{5 - u_n}{4(3 - u_n)} \\ &= \frac{2u_n - 2}{4(3 - u_n)} \\ &= \frac{2(u_n - 1)}{4(3 - u_n)} \\ &= \frac{1}{2} \times v_n \end{aligned}$$

إذن $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$ لكل n من \mathbb{N}

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{3 - u_0} = \frac{2 - 1}{3 - 2} = 1$

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$

إذن $v_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و منه $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N}

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n} &\Leftrightarrow u_n - 1 = (3 - u_n)v_n \\ &\Leftrightarrow u_n - 1 = 3v_n - u_nv_n \\ &\Leftrightarrow u_n + u_nv_n = 1 + 3v_n \\ &\Leftrightarrow u_n(1 + v_n) = 1 + 3v_n \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n} \end{aligned}$$

إذن : $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ لكل n من \mathbb{N}

$$\text{و بما أن } v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ فإن } u_n = \frac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

ج- بما أن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \text{ و منه } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{1}$$

تصحيح التمرين الثاني

(1) أ- لدينا $\overrightarrow{AB} (1, 0, -2)$ و $\overrightarrow{AC} (0, 1, -2)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \text{ : إذن}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \text{ و منه :}$$

ب- لدينا : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} (2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) إذن معادلة ديكرتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $(2)x + (2)y + (1)z + d = 0$

و بما أن $A(2,1,3) \in (ABC)$ فإن $(2)(2) + (2)(1) + (1)(3) + d = 0$ أي $d = -9$ وبالتالي : $2x + 2y + z - 9 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوى (ABC)

(2) أ- طريقة 1:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 &= 0 \Leftrightarrow M(x, y, z) \in (S) \\ x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 &= 34 \Leftrightarrow \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 &= 34 + 1 + 1 \Leftrightarrow \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 &= 36 \Leftrightarrow \\ (x-1)^2 + (y-(-1))^2 + (z-0)^2 &= (6)^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1, -1, 0)$ و أن شعاعها هو 6

طريقة 2: معادلة الفلكة الفلكة (S) هي : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$

$$\Omega(1, -1, 0) \text{ هو النقطة مركز الفلكة } (S) \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\alpha}{2} = \frac{-(-2)}{2} = 1 \\ \frac{-\beta}{2} = \frac{-(-2)}{2} = -1 \text{ لدينا :} \\ \frac{-\gamma}{2} = \frac{-(0)}{2} = 0 \end{array} \right.$$

$$R = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\delta}}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (0)^2 - 4(-34)}}{2} = \frac{\sqrt{144}}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ و لدينا :}$$

إذن شعاع الفلكة (S) هو 6

$$\text{ب- لدينا : } d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2(1) + 2(-1) + (0) - 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

بما أن $d(\Omega, (ABC)) < R$ ($R = 6$ شعاع الفلكة (S))

فان : المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

3 أ- لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من $\Omega(1,-1,0)$ و العمودي على المستوى (ABC)

بما أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} (2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) و بما أن (Δ) عمودي على المستوى (ABC)

فإن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} (2,2,1)$ هي متجهة موجهة للمستوى (ABC)

و لدينا $\Omega(1,-1,0) \in (\Delta)$

$$\begin{cases} x = (1) + t(2) \\ y = (-1) + t(2) \\ z = (0) + t(1) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ هو : } (\Delta) \text{ تمثيل بارامتري للمستقيم } (\Delta)$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ أي :}$$

ب- ليكن $H(x_H, y_H, z_H)$ مركز الدائرة (Γ) (H هو المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (ABC))

$$\begin{cases} x_H = 1 + 2t \\ y_H = -1 + 2t \\ z_H = t \end{cases} \Leftrightarrow H(x_H, y_H, z_H) \in (\Delta) \cap (ABC)$$

$$2x_H + 2y_H + z_H - 9 = 0$$

$$\begin{cases} x_H = 1 + 2t \\ y_H = -1 + 2t \\ z_H = t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$2(1 + 2t) + 2(-1 + 2t) + (t) - 9 = 0$$

$$\begin{cases} x_H = 1 + 2t \\ y_H = -1 + 2t \\ z_H = t \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_H = 3 \\ y_H = 1 \\ z_H = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

و منه النقطة H هي B
و بالتالي : مركز الدائرة (Γ) هو النقطة B .

تصحيح التمرين الثالث

(1) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - 4z + 29 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(29) = -100$$

لدينا : $\Delta < 0$ بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z = \frac{-(-4) + i\sqrt{100}}{2(1)} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-(-4) - i\sqrt{100}}{2(1)}$$

$$z = \frac{4+10i}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{4-10i}{2}$$

$$z = 2+5i \quad \text{أو} \quad z = 2-5i$$

$$S = \{2-5i, 2+5i\} \quad \text{إذن :}$$

(2) أ-

$$u = b - \omega = (5+8i) - (2+5i) = 5+8i - 2-5i = 3+3i \quad \text{لدينا} \quad \bullet$$

$$u = 3+3i \quad \text{إذن}$$

$$|u| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad \text{لدينا} \quad \bullet$$

$$u = 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad \checkmark$$

$$\arg u \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{إذن}$$

$$\text{ب- نعلم أن } \arg \bar{u} \equiv -\arg u [2\pi] \quad \text{إذن} \quad \arg \bar{u} \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

ج-

$$a - \omega = (5+2i) - (2+5i) = 5+2i - 2-5i = 3-3i = \overline{3+3i} = \bar{u} \quad \bullet$$

$$|a - \omega| = |\bar{u}| \quad \text{بما أن } a - \omega = \bar{u} \quad \text{فإن} \quad \bullet$$

$$|a - \omega| = |b - \omega| \quad \text{و منه} \quad |a - \omega| = |u| \quad \text{إذن} \quad |\bar{u}| = |u| \quad \text{و نعلم أن}$$

و بالتالي $\Omega A = \Omega B$

$$\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \arg\left(\frac{u}{\bar{u}}\right) [2\pi] \text{ لدينا } \blacksquare$$

$$\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \arg(u) - \arg \bar{u} [2\pi] \text{ إذن}$$

$$\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) [2\pi] \text{ إذن}$$

$$\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ومنه}$$

د- نعتبر الدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$

لنحدد صورة النقطة A بالدوران R

طريقة 1:

$$R(A) = B \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} \Omega A = \Omega B \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right. \text{ فإن } \left\{ \begin{array}{l} \Omega A = \Omega B \\ \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right. \text{ بما أن}$$

طريقة 2:

الكتابة العقديّة للدوران R هي $z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$

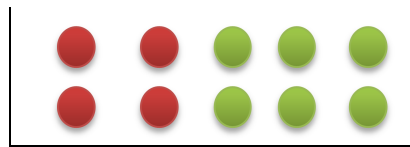
$$\text{إذن } z' - (2+5i) = i(z - (2+5i)) \text{ أي } z' = iz + 7 + 3i$$

لنحدد صورة النقطة A بالدوران R

$$z' = ia + 7 + 3i = i(5+2i) + 7 + 3i = 5i - 2 + 7 + 3i = 5 + 8i = b$$

ومنّه صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة B

تصحيح التمرين الرابع



التجربة " نسحب عشوائيا و في أن واحد كرتين من الصندوق " ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة .

$$\text{card } \Omega = C_{10}^2 = 45 \text{ لدينا}$$

(1) ليكن A الحدث : " الكرتان المسحوبتان حمراوان " .

$$p(A) = \frac{2}{15} \text{ و منه : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card } \Omega} = \frac{6}{45} \text{ إذن } \text{card}A = C_4^2 = 6 \text{ لدينا}$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين

أ. لنحدد القيم التي يأخذها X :

- إذا سحبنا كرتين حمراوتين من الصندوق فإنه يتبقى لنا كرتين حمراوتين في الصندوق إذن $X = 2$
 - إذا سحبنا كرة حمراء و كرة خضراء فإنه يتبقى لنا ثلاث كرات حمراء في الصندوق إذن $X = 3$
 - إذا سحبنا كرتين خضراوتين فإنه يتبقى لنا أربع كرات حمراء في الصندوق إذن $X = 4$
- إذن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $\{2,3,4\}$

ب.

$$p(X = 3) = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{45} = \frac{4 \times 6}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15} \quad \square$$

لنحدد قانون احتمال X :

$$p(X = 2) = p(A) = \frac{2}{15} \quad \checkmark$$

$$p(X = 3) = \frac{8}{15} \quad \checkmark$$

$$p(X = 4) = \frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45} = \frac{5}{15} \quad \checkmark$$

x_i	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{15}$

تصحيح المسألة :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x = -\infty \quad \text{لدينا : (1) أ. I}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \quad \text{لأن} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -4e^x = 0 \end{array} \right.$$

ب- لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 4e^x = 0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x - 2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

(2) أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 + e^x (e^x - 4) = +\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{لأن} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 4 = +\infty \end{array} \right.$$

ب-

▪ لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{x} + \frac{e^{2x} - 4e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{x} + \frac{e^x}{x} (e^x - 4) = +\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{لأن} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 4 = +\infty \end{array} \right.$$

فإن (C_f) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتيب بجوار $+\infty$ بما أن

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right.$$

(3) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}

ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا : $f'(x) = (2x - 2 + e^{2x} - 4e^x)' = 2 + 2e^{2x} - 4e^x = 2(e^{2x} - 2e^x + 1)$

إذن : $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$ لكل x من \mathbb{R}

ب- لدينا $f'(x) \geq 0$ لكل x من \mathbb{R} و $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

ج- لنبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1, \ln 4[$ بحيث $f(\alpha) = 0$

✓ f متصلة على $[1, \ln 4]$

✓ f تزايدية قطعاً على $[1, \ln 4]$

✓ لدينا: $\begin{cases} f(1) = e^2 - 4e = e(e-4) \\ f(\ln 4) = 2\ln(4) - 2 = 2(\ln(4) - 1) \end{cases}$ إذن $f(1) \times f(\ln 4) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية: يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1, \ln 4[$ بحيث $f(\alpha) = 0$

(4) أ- ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا: $f(x) - (2x - 2) = e^{2x} - 4e^x = e^x(e^x - 4)$

بما أن: $e^x > 0$ فإن إشارة $f(x) - (2x - 2)$ هي إشارة $e^x - 4$

لدينا: $e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 4$

▪ على المجال $]\ln 4, +\infty[$: $x > \ln 4$

إذن $e^x > 4$

إذن $e^x - 4 > 0$

إذن $f(x) - (2x - 2) > 0$

ومنه (C_f) يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]\ln 4, +\infty[$

▪ على المجال $]-\infty, \ln 4[$: $x < \ln 4$

إذن $e^x < 4$

إذن $e^x - 4 < 0$

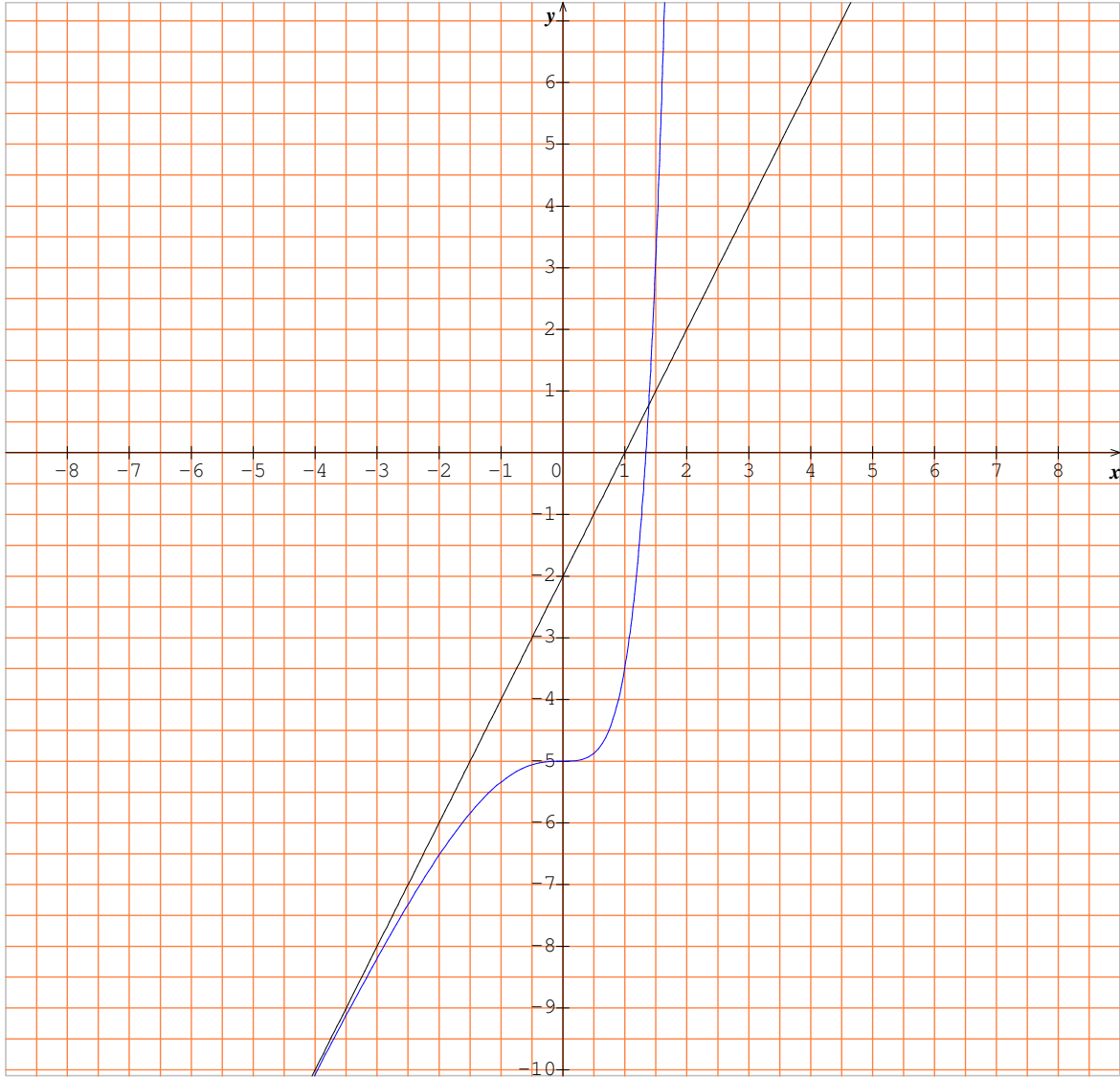
إذن $f(x) - (2x - 2) < 0$

ومنه (C_f) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $]-\infty, \ln 4[$

ب- بما أن f' لا تتعدم ولا تغير إشارتها عند العدد 0 فإن النقطة التي زوج إحداثياتها $(0, f(0))$ هي نقطة انعطاف

و منه المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثياتها هو $(0, -5)$

ج-



(5) أ-

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 4e^x \right]_0^{\ln 4} \\
 &= \left(\frac{1}{2}e^{2\ln 4} - e^{\ln 4} \right) - \left(\frac{1}{2}e^{2(0)} - 4e^0 \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} \times 16 - 4 \times 4 \right) - \left(\frac{1}{2} - 4 \right) \\
 &= 8 - 16 - \frac{1}{2} + 4 \\
 &= -\frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

ب- لنحسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (D) و محور الأرتايب و المستقيم الذي معادلته $x = \ln 4$:

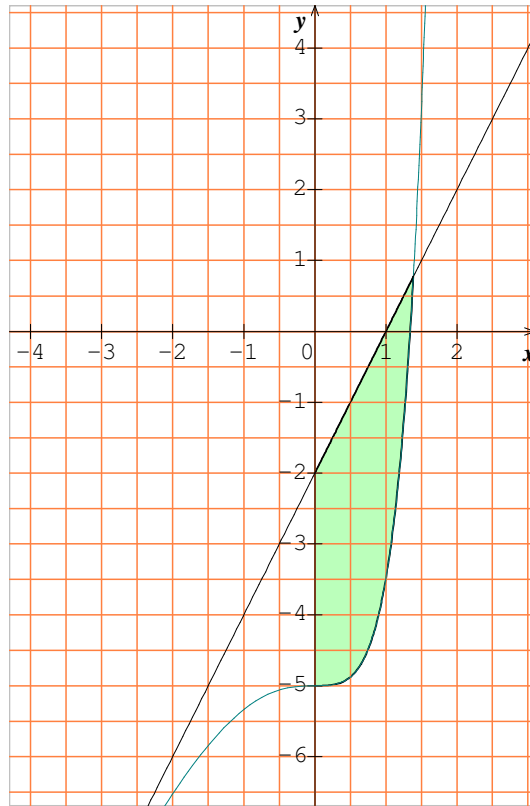
$$A = \int_0^{\ln 4} |f(x) - (2x - 2)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

بما أن : على المجال $[0, \ln 4]$: $f(x) - (2x - 2) \leq 0$ فإن :

$$A = \int_0^{\ln 4} ((2x - 2) - f(x)) dx \times 1cm \times 1cm$$

$$A = \int_0^{\ln 4} -(e^{2x} - e^x) dx .cm^2 \quad \text{إذن}$$

$$A = \frac{9}{2}.cm^2 \quad \text{و منه}$$



II. 1 أ- لنحل المعادلة التفاضلية $(E): y'' - 3y' + 2y = 0$

المعادلة المميزة : $r^2 - 3r + 2 = 0$

لدينا $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1$

إذن حل المعادلة هما : $r_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2(1)} = 1$ و $r_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2(1)} = 2$

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad y : x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$$

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad y : x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x} \quad \text{أي :}$$

ب- لنحدد الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين $g(0) = -3$ و $g'(0) = -2$

■ g حل للمعادلة (E) إذن $g(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

(حيث α و β سيتم تحديدهما)

▪ الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = \alpha e^x + 2\beta e^{2x}$

▪ لدينا :
$$\begin{cases} g(0) = -3 \\ g'(0) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ \alpha + 2\beta = -2 \end{cases}$$

إذن $\alpha = -4$ و $\beta = 1$

و منه : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = (-4)e^x + (1)e^{2x}$

أي : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = e^{2x} - 4e^x$

(2) لتكن h الدالة العددية المعرفة على المجال $]\ln 4, +\infty[$ بما يلي :

$$h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x) = \ln(g(x)) = \ln(f(x) - (2x - 2))$$

أ-

▪ لدينا متصلة على $]\ln 4, +\infty[$

(لأن الدالة g متصلة على $]\ln 4, +\infty[$ و $(\forall x \in]\ln 4, +\infty[) : g(x) > 0$)

▪ الدالة h قابلة للاشتقاق على $]\ln 4, +\infty[$

ليكن $x \in]\ln 4, +\infty[$:

$$h'(x) = (\ln(e^{2x} - 4e^x))' = \frac{(e^{2x} - 4e^x)'}{e^{2x} - 4e^x} = \frac{2e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 4e^x} = \frac{2(e^x - 2)}{e^x - 4}$$

على المجال $]\ln 4, +\infty[$ لدينا : $e^x - 4 > 0$ و $e^x - 2 > 0$

إذن $(\forall x \in]\ln 4, +\infty[) : h'(x) > 0$

و منه الدالة h تزايدية قطعاً على $]\ln 4, +\infty[$

بما أن h متصلة وتزايدية قطعاً على $]\ln 4, +\infty[$ فإن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة من مجال J نحو $]\ln 4, +\infty[$

حيث : $J = h(]\ln 4, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow \ln 4^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

لأن : $\lim_{x \rightarrow \ln 4^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 4^+} \ln(e^{2x} - 4e^x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x} - 4e^x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty$

ب-

▪ لدينا : $h(\ln 5) = \ln(e^{2\ln 5} - 4e^{\ln 5}) = \ln(25 - 20) = \ln 5$

$$h(\ln 5) = \ln 5 \quad \text{إذن :}$$

■

✓ الدالة h قابلة للاشتقاق في $\ln(5)$

✓ ولدينا : $h'(\ln(5)) = 6$ إذن $h'(\ln(5)) \neq 0$

إذن الدالة h^{-1} قابلة للاشتقاق في $\ln 5$

$$(h^{-1})'(\ln 5) = (h^{-1})'(h(\ln 5)) = \frac{1}{h'(\ln 5)} = \frac{1}{6} \quad \text{ولدينا :}$$

$$(h^{-1})'(\ln 5) = \frac{1}{6} \quad \text{إذن :}$$