

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة العادية 2019  
- الموضوع -



المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

\*\*\*\*\*

NS24

4	مدة الانجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.  
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.  
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 ن)  
- التمرين 2 يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)  
- التمرين 3 يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)  
- التمرين 4 يتعلق بالتحليل.....(10 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها  
لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير



**التمرين 1: (3.5 نقطة)**

نذكر أن  $(\mathbb{C}, +, \times)$  جسم تبادلي وأن  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة، صفرها المصفوفة المنعدمة  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . ليكن \* قانون التركيب الداخلي المعرف في  $\mathbb{C}$  بما يلي:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) ; (x + yi) * (a + bi) = xa + (x^2b + a^2y)i$$

1- (أ) بين أن القانون \* تبادلي في  $\mathbb{C}$  0.25

ب) بين أن القانون \* تجميعي في  $\mathbb{C}$  0.5

ج) بين أن القانون \* يقبل عنصرا محايدا  $e$  يتم تحديده. 0.25

د) ليكن  $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ . بين أن العدد العقدي  $x + yi$  يقبل العدد العقدي  $\frac{1}{x} - \frac{y}{x^4}i$  مماثلا له بالنسبة للقانون \* 0.25

2- نعتبر المجموعة الجزئية  $E$  للمجموعة  $\mathbb{C}$  المعرفة بما يلي:  $E = \{x + yi / x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R}\}$

أ) بين أن  $E$  مستقر بالنسبة للقانون \* في  $\mathbb{C}$  0.25

ب) بين أن  $(E, *)$  زمرة تبادلية. 0.5

3- نعتبر المجموعة الجزئية  $G$  للمجموعة  $E$  المعرفة بما يلي:  $G = \{1 + yi / y \in \mathbb{R}\}$  0.5

بين أن  $G$  زمرة جزئية للزمرة  $(E, *)$

$$4- \text{ نعتبر المجموعة } F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R} \right\}$$

أ) بين أن  $F$  مستقر بالنسبة للقانون  $\times$  في  $M_2(\mathbb{R})$  0.25

ب) ليكن  $\varphi$  التطبيق من  $E$  نحو  $F$  الذي يربط كل عدد عقدي  $x + yi$  من  $E$  بالمصفوفة  $M(x^2, y) = \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$  0.5

من  $F$ . بين أن  $\varphi$  تشكل تقابلي من  $(E, *)$  نحو  $(F, \times)$

ج) استنتج أن  $(F, \times)$  زمرة تبادلية. 0.25

**التمرين 2: (3.5 نقطة)**

ليكن  $m$  عددا عقديا غير حقيقي ( $m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ )

1- نعتبر في  $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول  $z$  المعرفة بما يلي:  $(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$

1- (أ) بين أن مميز المعادلة  $(E)$  غير منعدم. 0.25

- (ب) حدد  $z_1$  و  $z_2$  ، حل المعادلة (E) 0.5
- 2- نفترض في هذا السؤال أن  $m = e^{i\theta}$  حيث  $0 < \theta < \pi$
- (أ) حدد معيار و عمدة للعدد  $z_1 + z_2$  0.5
- (ب) بين أنه إذا كان  $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$  فإن  $z_1 + z_2 = 2i$  0.25
- II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$
- نعتبر النقط التالية:
- A النقطة ذات اللحق  $a = 1 + i$  ، B النقطة ذات اللحق  $b = (1 + i)m$  ، C النقطة ذات اللحق  $c = 1 - i$  ،
- D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته  $\frac{\pi}{2}$  و  $\Omega$  منتصف القطعة [CD].
- (أ-1) بين أن لحق النقطة  $\Omega$  هو  $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$  0.5
- (ب) احسب  $\frac{b-a}{\omega}$  0.25
- (ج) استنتج أن  $(O\Omega) \perp (AB)$  و أن  $AB = 2O\Omega$  0.5
- 2- المستقيم  $(O\Omega)$  يقطع المستقيم  $(AB)$  في النقطة H ذات اللحق h
- (أ) بين أن  $\frac{h-a}{b-a}$  عدد حقيقي وأن  $\frac{h}{b-a}$  عدد تخيلي صرف . 0.5
- (ب) استنتج h بدلالة m 0.25

### التمرين 3: (3 نقط)

نقبل أن 2969 ( السنة الأمازيغية الحالية) عدد أولي.

ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين بحيث: [2969]  $n^8 + m^8 \equiv 0$

1- نفترض في هذا السؤال أن 2969 لا يقسم n

(أ) باستعمال مبرهنة بوزو (BEZOUT)، بين أن: [2969]  $u \times n \equiv 1$  ;  $(\exists u \in \mathbb{Z})$  0.5

(ب) استنتج أن: [2969]  $(u \times m)^8 \equiv -1$  و أن: [2969]  $(u \times m)^{2968} \equiv -1$  (لاحظ أن:  $2968 = 8 \times 371$ ) 0.5

(ج) بين أن 2969 لا يقسم  $u \times m$  0.5

(د) استنتج أنه لدينا أيضا: [2969]  $(u \times m)^{2968} \equiv 1$  0.5

2- (أ) باستعمال النتائج السابقة، بين أن 2969 يقسم n 0.5

(ب) بين أن: [2969]  $m \equiv 0$  و [2969]  $n \equiv 0$   $\Leftrightarrow$  [2969]  $n^8 + m^8 \equiv 0$  0.5

## التمرين 4: (10 نقط)

الجزء I: نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $f(x) = 4x \left( e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \right)$

ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد و ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  0.5

2- (أ) بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ، وأن:  $f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1 - x)$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R})$  0.5

(ب) ادرس تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ ، ثم ضع جدول تغيراتها. 0.75

(ج) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  في المجال  $\left] \frac{3}{2}, 2 \right]$  بحيث:  $f(\alpha) = 0$  (نأخذ:  $e^{\frac{3}{2}} = 4,5$ ) 0.5

(د) تحقق أن:  $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$  0.25

3- (أ) بتطبيق مبرهنة رول على الدالة  $f'$ ، بين أنه يوجد عدد حقيقي  $x_0$  من المجال  $]0, 1[$  بحيث:  $f''(x_0) = 0$  0.5

(ب) بتطبيق مبرهنة التزايد المتناهية على الدالة  $f''$ ، بين أنه، لكل عدد حقيقي  $x$  يخالف  $x_0$  من المجال  $[0, 1]$ ، 0.5

$$\text{لدينا: } \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$$

(ج) استنتج أن  $I(x_0, f(x_0))$  هي نقطة انعطاف للمنحنى  $(C)$  0.25

4- (أ) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى  $(C)$  0.5

(ب) مثل مبيانيا المنحنى  $(C)$  في المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  0.5

(نأخذ:  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$  و  $f(1) = -0.5$  و غير مطلوب إنشاء النقطة  $I$ )

5- (أ) تحقق أن:  $f(x) \leq 0$  ;  $(\forall x \in ]-\infty, \alpha])$  0.25

(ب) بين أن:  $\int_0^\alpha f(x) dx = \frac{2\alpha(\alpha^2 - 3)}{3}$ ، ثم استنتج أن:  $\frac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$  0.75

(ج) أحسب، بدلالة  $\alpha$  و بوحدة  $\text{cm}^2$ ، مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى  $(C)$  و المستقيمت التي 0.5

معادلاتها على التوالي:  $x = \alpha$  و  $x = 0$  و  $y = 0$

الجزء II: نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) + u_n \quad \text{و} \quad u_0 < \alpha$$

- 0.5 1-أ) بين بالترجع أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < \alpha$  (استعمل السؤال 5-أ) من الجزء I)
- 0.25 ب) بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تناقصية.
- 2- نفترض أن  $0 \leq u_0$  ونضع:  $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R})$
- 0.5 أ) بين أن:  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) > 0$  (نأخذ:  $\ln 2 = 0.69$ )
- ب) باستعمال نتيجة السؤال السابق، بين أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n$
- 0.5 (لاحظ أن:  $f(x) + x = 4xg(x)$ )
- 0.25 ج) بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة.
- 0.5 د) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 3- نفترض أن  $u_0 < 0$
- 0.5 أ) بين أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$
- 0.5 ب) بين أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq u_0 + nf(u_0)$
- 0.25 ج) استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

انتهى